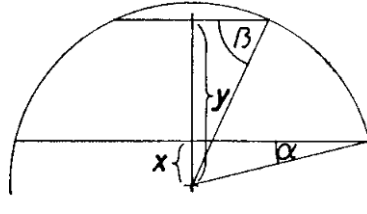


Válasszuk egységnek a gömb sugarát, és jelöljük a csonkakúpot határoló síkoknak a gömb középpontjától mért távolságát  $x$ -szel, illetve  $y$ -nal. Mivel a csonkakúpot félgömbbe írtuk, a középpont nem lehet a két sík között. Válasszuk úgy a betűzést, hogy  $x < y$  teljesüljön, és legyen továbbá  $x = \sin \alpha$ ,  $y = \sin \beta$ . Akkor a csonkakúpot határoló körlapok sugara  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ , a palást alkotója  $2 \sin \frac{\beta - \alpha}{2}$ , és a csonkakúp felszíne

$$F = \pi \left[ \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + 2 (\cos \alpha + \cos \beta) \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \right].$$



Rögzített  $\beta$  mellett ez  $\alpha$ -ban monoton fogy, tehát  $\alpha = 0$  mellett maximális. Ezt behelyettesítve, és a kapott függvényt  $\beta$  szerint deriválva az

$$f(\beta) = -2 \cos \beta \sin \beta - 2 \sin \beta \sin \frac{\beta}{2} + (1 + \cos \beta) \cos \frac{\beta}{2}$$

függvényt kapjuk (a  $\pi$  konstans elhagytuk). Ebből némi átalakítás után az

$$f(\beta) = 2 \left( 4 \sin^3 \frac{\beta}{2} - 3 \sin^2 \frac{\beta}{2} - 2 \sin \frac{\beta}{2} + 1 \right) \cos \frac{\beta}{2}$$

alak adódik. Mivel itt a zárójelben álló kifejezés együttthatóinak összege 0, ebből  $\left( \sin \frac{\beta}{2} - 1 \right)$  kiemelhető:

$$f(\beta) = 2 \left( 4 \sin^2 \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\beta}{2} - 1 \right) \left( \sin \frac{\beta}{2} - 1 \right) \cos \frac{\beta}{2}.$$

A kapott másodfokú kifejezés gyökei  $\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{8}$ , közülük  $\sin \frac{\beta}{2} > 0$  miatt csak

$$\sin \frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{17} - 1}{8}$$

jöhet szóba. Itt a másodfokú kifejezés előjele negatívból pozitívvá válik,  $\sin \frac{\beta}{2} < 1$ ,  $\cos \frac{\beta}{2} > 0$  miatt  $f(\beta)$  értéke pedig éppen fordítva, pozitívból vált negatívba. Emiatt annak a függvénynek, amelyiknek  $f(\beta)$  a deriváltja, ezen a helyen maximuma van, és a szóba jöhető  $0 < \beta < 90^\circ$  értékek mellett ez az egyetlen szélsőérték. Tehát az egységnyi sugarú félgömbbe írható maximális felszínű csonkakúp egyik határolólapja azonos a félgömböt határoló körlappal, a másik attól

$$y = \sin \beta = 2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} = 0,7188$$

távolságra van.

*Megjegyzés.* Megoldásunkban két fontos deriválási szabályt is felhasználtunk, amelyek a használatban levő függvény-táblázatban ugyan megtalálhatóak, de a tankönyvben nem. Az egyik szerint a  $\sin$  függvény deriváltja a  $\cos$  függvény, a másik szerint a deriválható  $u$  és  $v$  függvények szorzata is deriválható, és a derivált  $(u'v + uv')$ , ahol  $u'$ ,  $v'$  szokás szerint  $u$  és  $v$  deriváltját jelöli. Mivel

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2},$$

és  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ , valóban igaz, hogy

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sin(\beta + \varepsilon) - \sin \beta}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\varepsilon}{2}}{\frac{\varepsilon}{2}} \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \cos \left( \beta + \frac{\varepsilon}{2} \right) = \cos \beta.$$

A szorzatra vonatkozó állítás pedig a

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{u(x + \varepsilon) \cdot v(x + \varepsilon) - u(x) \cdot v(x)}{\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{u(x + \varepsilon) - u(x)}{\varepsilon} v(x + \varepsilon) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x) \frac{v(x + \varepsilon) - v(x)}{\varepsilon} \end{aligned}$$

átalakítás segítségével igazolható.