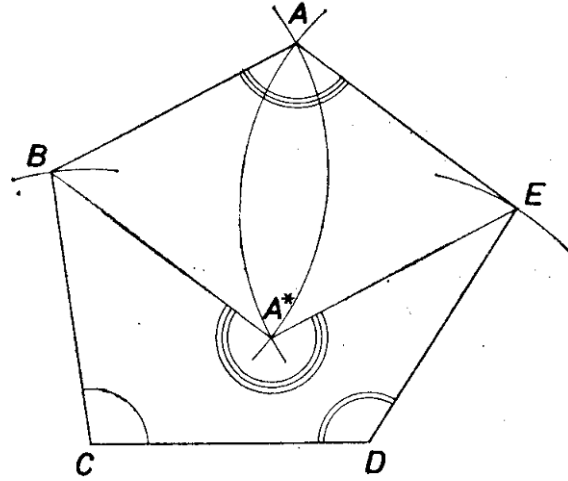


Kövessük az ötszög szerkesztését a jobb oldalon szereplő C , D szögekből. Az oldalak közös hosszát választjuk egységnek. Bármelyik három egymás utáni csúc egyenlő szárú háromszöget határoz meg, és ennek alapja az ötszög egyik átlója, így pl.

$$BD = 2 \sin \frac{C}{2},$$

$$BD^2 = 4 \sin^2 \frac{C}{2} = 2 - 2 \cos C.$$



1. ábra

A BDE háromszögből a cosinustétel alapján

$$BE^2 = BD^2 + DE^2 - 2BD \cdot DE \cos BDE \triangleleft,$$

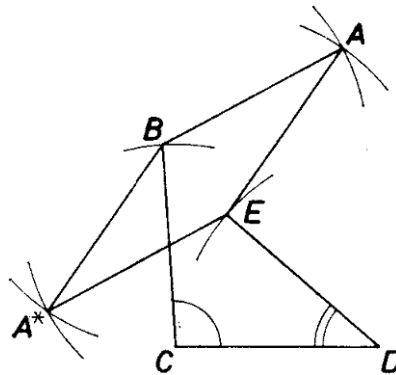
és amennyiben a BD egyenes szétválasztja a C , E csúcsokat (1. ábra):

$$BDE \triangleleft = D \triangleleft - BDC \triangleleft = D - \left(90^\circ - \frac{C}{2}\right) = D + \frac{C}{2} - 90^\circ,$$

$$(2) \quad BE^2 = 3 - 2 \cos C - 4 \sin \frac{C}{2} \sin \left(D + \frac{C}{2}\right),$$

majd a $2 \sin x \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y)$ azonosság fölhasználásával

$$(3) \quad BE^2 = 3 - 2 \cos C - 2 \cos D + 2 \cos(C + D).$$



2. ábra

Ugyanerre a kifejezésre jutunk akkor is, ha E a BD -nek C -t tartalmazó partján van, mert bár ekkor hasonlóan (2. ábra)

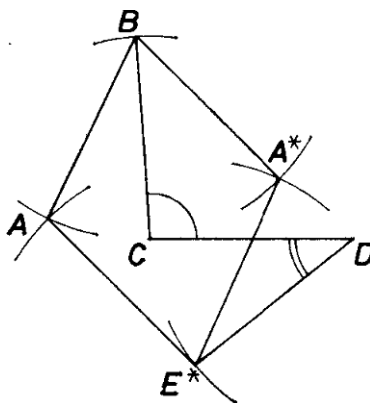
$$BDE \triangleleft = BDC \triangleleft - D \triangleleft = 90^\circ - \left(D + \frac{C}{2}\right),$$

de ennek cosinusa egyenlő az előbbiével.

Másfelől a BAE háromszögből

$$(4) \quad BE^2 = 2 - 2 \cos A,$$

és a (3), (4) egyenlőségből rendezéssel megkapjuk a bizonyítandó állítást.

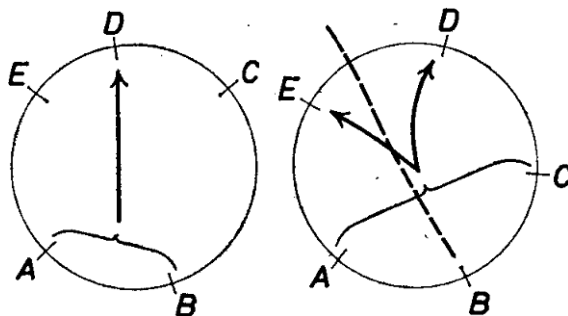


3. ábra

Az utóbbi lépésben nem néztük, hogyan esik a BE egyeneshez képest az A és D csúcs, mert bár az 1. ábra A^* pontjában – amelyre ugyancsak $A^*B = A^*E = 1$ – konkáv szöge van az A^*BCDE^* ötszögnek, de arra is $\cos A^* = \cos(360^\circ - A) = \cos A$.

Megjegyezzük, hogy (1) akkor is érvényes, ha a jobb oldalán szereplő C és D valamelyikénél van 180° -nál nagyobb szög, és ekkor is adódhat egyszerűen konkáv idom, mint a 3. ábrán $ABCDE^*$ (ahol $\cos C$ és $\cos D$ ugyanaz, mint a 2. ábrán). Azonban nem kívánunk belebonyolódni a hurkolt A^*BCDE^* idomok elemzésébe, hogy melyik az idom belseje, hogyan volnának a belső szögek az egymás utáni C -nél és D -nél stb.

Számpéldánk előkészítéséül kimondjuk: az eredeti alakjában (1) arra alkalmas, hogy az egyenlő oldalú ötszög két szomszédos szögéből kiszámíthassuk a velük szemben levő szöget (ti. amelyik egyikükkel sem szomszédos), a 4. ábra első sémája szerint A -ból és B -ből D -t.



4. ábra

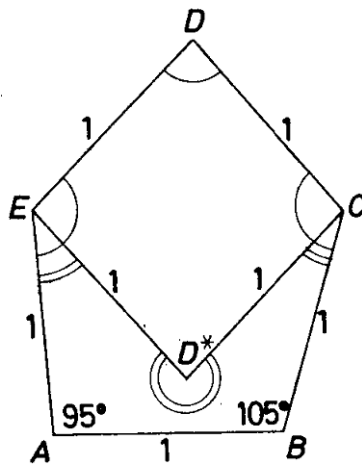
Fölírhattuk volna azonban (2) és (4) egyenlőségét is, és ebből a

$$(5) \quad \sin \left(D + \frac{C}{2} \right) = \frac{1 + 2 \cos A - 2 \cos C}{4 \sin \frac{C}{2}}$$

alak a feladat megfordítására alkalmas: két nem szomszédos ismert szögből annak a kettőnek a kiszámítására, amelyek szemben vannak a két ismert közti szöggel. A második sémán a közbülső B -vel E is szemben van és (5)-ben egyrészt A és C , másrészt D és E fölcserélésével

$$\sin \left(E + \frac{A}{2} \right) = \frac{1 + 2 \cos C - 2 \cos A}{4 \sin \frac{A}{2}}$$

(tükrözés a második séma B -n átmenő „tengelyére”).



5. ábra

Most már $A = 95^\circ$ és $B = 105^\circ$ alapján (5. ábra, mérthű) $\cos D = \cos D^* = \cos A + \cos B - \cos(A + B) - 0,5 = +0,0937$, amiből $D = 84^\circ 37'$, $D^* = 275^\circ 23'$. Továbbá

$$\begin{aligned} \sin\left(C + \frac{D}{2}\right) &= \frac{1 + 2 \cos A - 2 \cos D}{4 \sin \frac{D}{2}} = \\ &= \frac{1 - \cos B + \cos(A + B)}{\sqrt{3 - 2 \cos A - 2 \cos B + 2 \cos(A + B)}} = 0,2371, \end{aligned}$$

ehhez az ábra szemléletére támaszkodva a $C + \frac{D}{2} = 166^\circ 17'$ értéket vesszük, és így $C = 123^\circ 59'$. Végül ugyanígy

$$\begin{aligned} \sin\left(E + \frac{D}{2}\right) &= \frac{1 - \cos A + \cos(A + B)}{\sqrt{3 - 2 \cos A - 2 \cos B + 2 \cos(A + B)}} = 0,1096, \\ E + \frac{D}{2} &= 173^\circ 43', \quad E = 131^\circ 24'. \end{aligned}$$

Átalakításaink szerint a C , D , E szögeket egymástól függetlenül, közvetlenül az adatokból számítottuk; az eredményekre teljesül $C + D + E = 340^\circ = 540^\circ - (A + B)$.

A konkáv esetre úgy kapjuk C -ből és E -ből C^* , E^* értékét, hogy levonjuk belőlük a $CDED^*$ rombusz alapján $(180^\circ - D)$ -t: $C^* = 28^\circ 36'$, $E^* = 36^\circ 1'$.