

Helyettesítsük (2) jobb oldalán α_j és β_j helyébe az (1) szerinti kifejezéseket, majd az összevonás után keletkező kifejezésekben f_k együtthatóját jelöljük E_k -val.

(1) szerint

$$\frac{\alpha_0}{2} = \frac{1}{2n+1}(f_0 + f_1 + \dots + f_{2n}).$$

α_j -ben, ill. β_j -ben ($j = 1, 2, \dots, n$) f_k együtthatója $\frac{2}{2n+1}\cos(k \cdot x_j)$, ill. $\frac{2}{2n+1}\sin(k \cdot x_j)$, így

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2n+1} + \frac{2}{2n+1} \sum_{j=1}^n [\cos(k \cdot x_j) \cdot \cos(j \cdot x_i) + \sin(k \cdot x_j) \cdot \sin(j \cdot x_i)] = \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{2}{2n+1} \sum_{j=1}^n \cos(k - i)x_j. \end{aligned}$$

Közben kihasználtuk, hogy $jx_i = ix_j$. Ha $k = i$, akkor nyilván $E_k = 1$. Ha igazoljuk még, hogy a $k - i = m \neq 0$ esetben

$$\sum_{j=1}^n \cos mx_j = -\frac{1}{2},$$

készen vagyunk.

Tekintsük a derékszögű koordináta-rendszerben a $P_0(1, 0)$ pontot. Ezt az origó körül pozitív irányban $m \cdot x_i$ ($i = 1, 2, \dots, 2n$) szöggel elforgatva kapjuk a P_i pontot. Állítjuk, hogy az $\vec{OP}_0, \vec{OP}_1, \dots, \vec{OP}_{2n}$ vektorok összege a nullvektor. Mivel bármely két szomszédos vektor $m \cdot \frac{2\pi}{2n+1}$ szöveget zár be, azért e szöggel elforgatva az egész rendszer önmagába megy át, tehát az összegük is, ami csak a nullvektorra áll fenn. Ezt az összefüggést a vektorok első koordinátáira felírva:

$$(3) \quad \sum_{k=0}^{2n} \cos m \cdot x_k = 0.$$

Mivel $m \cdot x_{2n+1-j} = m \cdot 2\pi - m \cdot x_j$, azért $\cos m \cdot x_j = \cos m \cdot x_{2n+1-j}$ ($j = 1, 2, \dots, n$). Ennek alapján (3) a következő alakba írható:

$$2 \sum_{j=1}^n \cos m \cdot x_j + \cos 0 = 0,$$

ami éppen az igazolandó összefüggést adja.

Fordán Tibor (Körmend, Kölcsey F. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. Mint azt többen észrevették, a feladat szövegében volt egy apró hiba. α_i -t és β_i -t ugyanis az (1) formula az $i = 0, 1, \dots, n$ esetekre értelmezi, a szövegben a kitézéskor = helyett \neq szerepelt.

2. A α_i, β_i számokat a (2) feltétel egyértelműen meghatározza, ez egy $2n+1$ ismeretlenes lineáris egyenletrendszer. Az α_i, β_i együtthatókat Fourier (ejtsd furié) együtthatóknak nevezik, ezek nélkülözhetetlenek a különböző rezgések tanulmányozásában (mint pl. villamos áramkörök vagy hídszerkezetek méretezésében stb.).

3. Az (1) formulák alapján a Fourier együtthatókat kb. $4n^2$ szorzással kaphatjuk meg (ebben már a $\sin jx_i$, és a $\cos jx_i$ kiszámítása is benne van). Egy másik, Cooley és Tukey amerikai matematikusoktól származó eljárás a szükséges szorzások számát ($4n \cdot \log_2 n$)-re szorítja le. Erről a „gyors Fourier-transzformáció”-nak nevezett eljárásról bővebben olvasható Lovász-Gács: Algoritmusok. Műszaki Könyvkiadó, 1978, 88–90. oldalán.