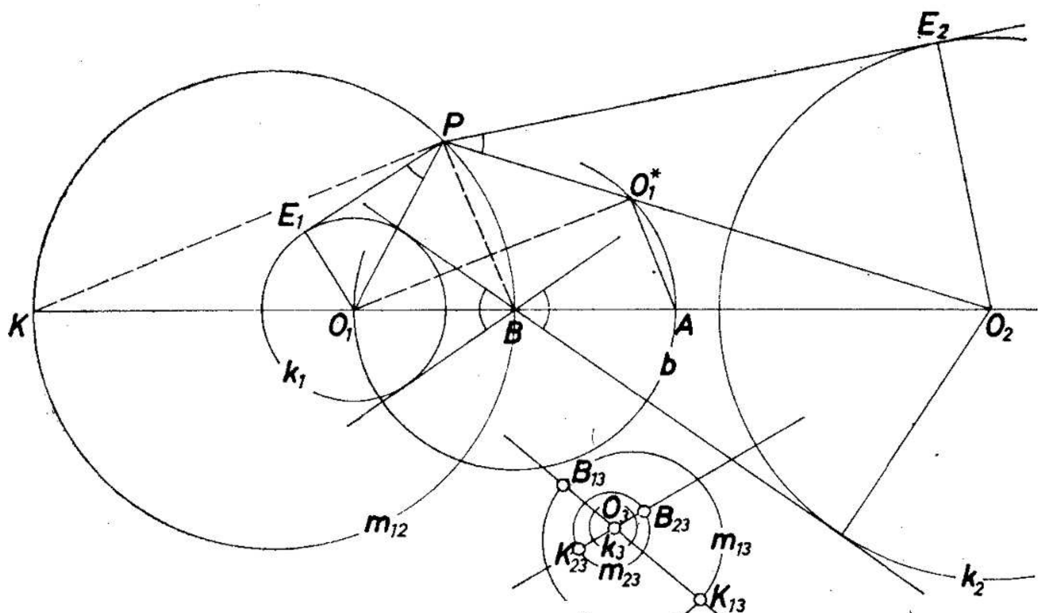
Jelöljük a három kör középpontját O_1-gyel, O_2-vel, O_3-mal, sugaraikat r_1-gyel, r_2-vel, r_3-mal, magukat a köröket pedig k_1-gyel, k_2-vel, k_3-mal. Keressük meg először a síkon mindazokat a P pontokat, amelyekből k_1 és k_2 egyenlő szög alatt látszik. A keresett pontok közé tartozik a két kör közös belső érintőinek B metszéspontja, hiszen a B-hez tartozó két látószög a B centrumra nézve tükrösen helyezkedik el. Ha P a vizsgált mértani hely tetszőleges pontja, és E_1, E_2 a P-ből k_1-hez, k_2-höz húzott érintők érintési pontjai, a PO_1E_1, PO_2E_2 háromszögek derékszögűek, és P-nél levő szögük egyenlő. Emiatt ezek a háromszögek hasonlóak, és

(1) $$PO_1 : PO_2 = r_1 : r_2,$$

vagyis a keresett pontoknak az O_1, O_2 középpontoktól mért távolságának aránya egyenlő a sugarak arányával. Megfordítva, ha valamely P pontra teljesül (1), akkor P nem lehet sem k_1, sem k_2 belső pontja, és a P-ből k_i-hez húzott érintők E_i érintési pontjára $i = 1, 2$ mellett (1) a PO_1E_1, PO_2E_2 derékszögű háromszögek hasonlóságát biztosítja, amiből pedig a látószögek egyenlősége következik. Így a B pontra

(2) $$BO_1 : BO_2 = r_1 : r_2.$$



Ha $r_1 = r_2$, az (1) feltételnek eleget tevő pontok az O_1O_2 szakasz felező merőleges egyenesén vannak. Tegyük fel például, hogy $r_1 < r_2$, és legyen P a vizsgált mértani hely tetszőleges, de nem az O_1O_2 centrálison levő pontja. A PO_1O_2 háromszög P-beli belső szögfelezőjének az O_1O_2 szakasszal alkotott B^* metszéspontjára

$$B^*O_1 : B^*O_2 = PO_1 : PO_2 = r_1 : r_2 = BO_1 : BO_2$$

teljesül, így az nem lehet más, mint a B pont. Ha O_1-et a PB szögfelezőre tükrözzük a B körüli, O_1-en átmenő b kör O_1^* pontját kapjuk, ami ugyanakkor a PO_2 szakaszon is rajta van. Jelöljük b-nek O_1-gyel átellenes pontját A-val, mivel AO_1^* is, PB is merőleges $O_1O_1^*$-ra, AO_1^* párhuzamos PB-vel. Továbbá

$$O_2O_1^* : O_2P = AO_2 : BO_2 = (r_2 - r_1) : r_2.$$

Eszerint a keresett mértani helyet az O_2 centrumból $(r_2 - r_1) : r_2$ arányban kicsinyítve a b kör pontjaihoz jutunk. Megfordítva, ha O_1^* a b kör tetszőleges, A-tól, O_1-től különböző pontja, a belőle az O_2 centrumú, $r_2 : (r_2 - r_1)$ arányú nagyítással kapott P pontra $PB \parallel 0_1^*A$ miatt $PB \perp O_1O_1^*$, és így

$$PO_1 : PO_2 = PO_1^* : PO_2 = r_1 : r_2,$$

tehát P a mértani hely pontja. Nagyítsuk hát ki az O_2 centrumból $r_2 : (r_2 - r_1)$ arányban a b kört, és megkapjuk a keresett mértani helyet. Állításunkat már csak az O_1-ből származó K pontra kell ellenőrizni, ami $PK \perp PB$ miatt egyben az O_1O_2P háromszög P-beli külső szögfelezőjének is pontja. Így $KO_1 : KO_2 =$
$= PO_1 : PO_2$, tehát valóban teljesül rá (1). Mivel $r_1 < r_2$ mellett a k_1, k_2 körök külső érintői is metszik egymást, és e metszéspont a mértani helyhez tartozik, K nem lehet más, mint a külső érintők metszéspontja, és a vizsgált mértani hely a BK szakasz feletti Thalész-kör.

Jelöljük m_{12}-vel a kapott mértani helyet, és legyen m_{23} a k_2, k_3 körökhöz tartozó mértani hely. Ez tehát $r_2 = r_3$ esetén az O_2O_3 szakasz felező merőleges egyenese, különben a k_2, k_3 körök belső és külső hasonlósági centruma feletti Thalész-kör. Ha az m_{12}, m_{23} mértani helyeknek nincs közös pontjuk, akkor a feladatnak nincs megoldása. (Könnyen található példa, amikor ez valóban előfordul.) Ha P a két mértani hely közös pontja, ebből k_1 és k_3 is ugyanakkora szög alatt látszik, mint k_2, ez tehát a feladatnak is megoldása. Mivel m_{12}, m_{23} vagy kör vagy egyenes, közös pontjaik száma 0 vagy 1, vagy 2.