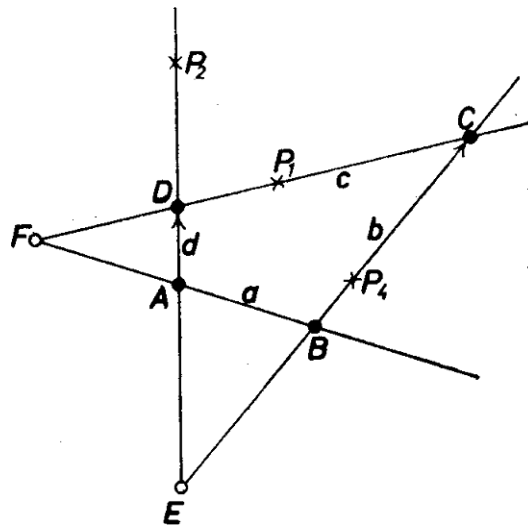


I. megoldás. Jelöljük a BC , DA egyenesek metszéspontját E -vel, AB , CD metszéspontját F -fel, és tegyük fel, hogy E az AB , F az AD egyenes C -vel ellentétes oldalán jön létre. Ez utóbbi feltevésnek nincs jelentősége, hiszen a feladat állításában a négyszög csúcsai egyenrangú szerepet játszanak.



Legyen továbbá

$$a = \frac{AB}{FB}, \quad b = \frac{BC}{EC}, \quad c = \frac{CD}{CF}, \quad d = \frac{DA}{DE}.$$

Ha a CDE háromszög területét T -vel jelöljük, akkor

$$2t = [1 - (1 - b)(1 - d)]T,$$

és az ADP_4 háromszög területe

$$t = [1 - (1 - d)]\lambda_4 T,$$

ahol $\lambda_4 = \frac{EP_4}{EC}$. E két összefüggés alapján λ_4 értéke

$$\lambda_4 = \frac{b + d - bd}{2d}.$$

Hasonlóan kapjuk a $\lambda_2 = \frac{EP_2}{ED}$, $\lambda_1 = \frac{FP_1}{FC}$ hányadosok értékét:

$$\lambda_2 = \frac{b + d - bd}{2b}, \quad \lambda_1 = \frac{a + c - ac}{2a}.$$

Azt fogjuk megmutatni, hogy P_1 rajta van a P_2P_4 egyenesen; azt, hogy P_3 is rajta van ezen, hasonlóan láthatnánk be. Mivel P_1 a CD szakaszt $(1 - \lambda_1):(\lambda_1 + c - 1)$ arányban osztja,

$$\overrightarrow{EP_1} = \frac{1 - \lambda_1}{c} \overrightarrow{ED} + \frac{\lambda_1 + c - 1}{c} \overrightarrow{EC} = \frac{1 - \lambda_1}{c\lambda_2} \overrightarrow{EP_2} + \frac{\lambda_1 + c - 1}{c\lambda_4} \overrightarrow{EP_4}.$$

Ismeretes, hogy P_1 akkor és csakis akkor van rajta a P_2P_4 egyenesen, ha itt az együtthatók összege 1. Eszerint azt kell megmutatnunk, hogy

$$(1 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2) + c\lambda_2(1 - \lambda_4) = 0.$$

Behelyettesítve a λ_i arányok értékét, a lehetséges egyszerűsítések után ebből az

$$\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right) \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{b}\right) = 1$$

összefüggést kapjuk.

Jelöljük az EFC háromszög területét τ -val. Akkor FBC területe $b\tau$, FAC területe pedig $(1 - a)b\tau$. Mivel FAC és EFC egy oldala közös, és a megfelelő magasságok aránya $d : 1$, ebből kapjuk, hogy

$$b = \frac{d}{1 - a}.$$

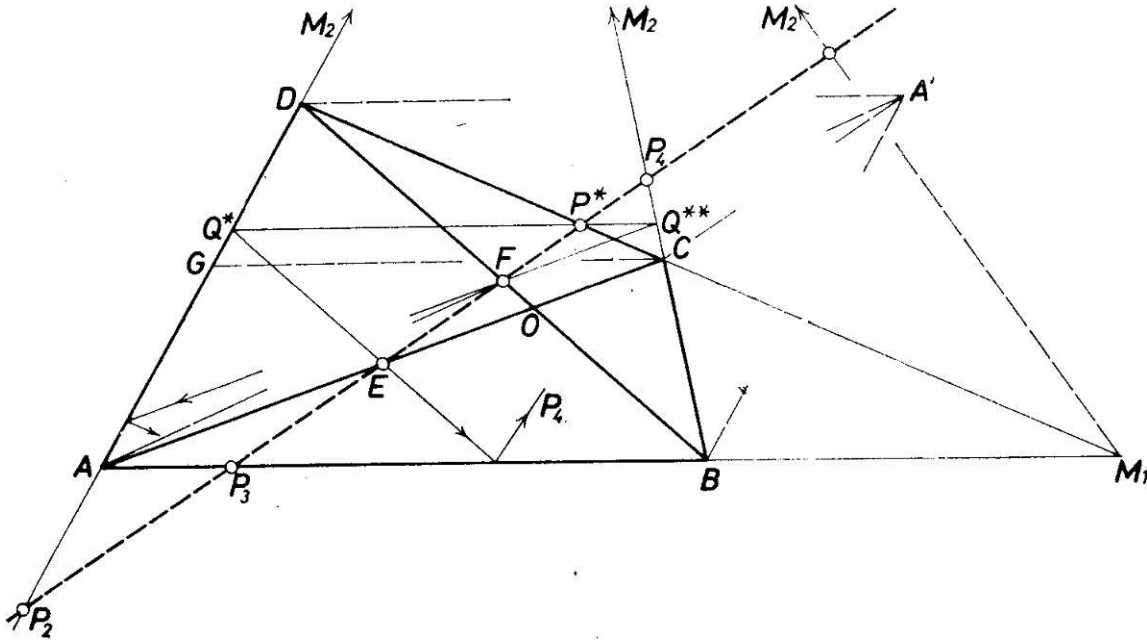
Hasonlóan kapjuk, hogy

$$c = \frac{a}{1 - d},$$

és ezeket a bizonyítandó összefüggésbe helyettesítve valóban azonosságot kapunk.

II. megoldás. Próbát téve a nem kizárt négyszögek legszabályosabbikával, a deltoiddal, az állítás szerinti egyenesként az idom tengelye adódik, két-két P pont egybeesik a tengely végpontjaival. Ezt találjuk a ferdén szimmetrikus négyszögnél is, ti. amelyben az egyik átló felezi a másikat. Azt sejtjük további vázlatokból is, hogy a kérdéses egyenes felezi az átlókat (és még a szemben fekvő oldalegyenes-párok metszéspontjai közti szakaszt is). Megfordítva azt fogjuk bizonyítani, hogy a P_i pontokat ($i = 1, 2, 3, 4$) az átlók felezőpontjaival meghatározott egyenes metszi ki az oldalegyenesekből. Ez az egyenes egyértelműen meg van határozva, hiszen a kiindulás kizárta a vizsgálatból a paralelogrammákat. Még trapézokra sem vonatkozik az állítás, így mindegyik P egyértelmű létezése is biztos, hiszen ha pl. az AB és CD egyenesek metszéspontja M , és egy P pont az MC félegyenesen fut, eközben az ABP háromszög területe minden pozitív értéket fölvesz.

A bizonyítást lényegében csak P_1 -re végezzük el, és a szemléletesség érdekében ehhez igazítjuk a csúcsozást. Legyen az átlók metszéspontja O , ez egyik átlót se felezzé (hiszen már láttuk azt az esetet, ha az egyiket felezi), az átlók nagyobbik darabjának végpontja A , ill. D , így a sejtésünk szerinti egyenes AB -n és DC -n át lép ki a négyszögből, az utóbbiról mutatjuk meg, hogy ez a P_1 .



A sejtésünktől függetlenül abból az észrevételből kaphatjuk meg P_1 -et, hogy a BED töröttvonal két egyenlő területű részre vágja a négyszöget: meghúzzuk E -n át a párhuzamost BD -vel AD -nek Q pontjáig (A és D között), innen pedig AB -vel haladunk párhuzamosan a CD -vel való metszéspontig. Ekkor ugyanis a területekre

$$(1) \quad \begin{aligned} ABP_1 &= ABQ = BDA - BDQ = BDA - BDE = ABED = AEB + AED = \\ &= \frac{ACB}{2} + \frac{ACD}{2} = \frac{1}{2}ABCD = t. \end{aligned}$$

Ennek megfordítását járjuk végig a bizonyításban: EF és CD közös P^* pontjából visszafelé szerkesztjük Q^* -ot: $Q^*P^* \parallel AB$, és belátjuk, hogy $Q^*E \parallel BD$. Ennek során P^* és Q^* helyzetét előbb szakaszok arányával jellemezzük, majd ezekből áttérünk alkalmas háromszögek területeinek arányára. Legyen még A -nak F -re való tükörképe A' , továbbá messe a C -n átmenő, AB -vel párhuzamos egyenes AD -t G -ben. Így $ABA'D$ paralelogramma és $CA' = 2 \cdot EF$, párhuzamosak is; e két szakasszal szorozzuk alább a nevezőt, ill. a számlálót. Szerkesztéseink szerint egyrészt

$$\frac{Q^*D}{GD} = \frac{P^*D}{CD} = \frac{2 \cdot P^*D \cdot EF}{CD \cdot CA'} = \frac{2 \cdot DFE}{DA'C} = \frac{DBE}{DA'G}.$$

(P^*D és CD nem magasságok e háromszögekben az EF , ill. CA' alaphoz képest, de arányosak a megfelelő magasságokkal, mert egyenlő szöggel hajlanak azokhoz. Ezzel használtuk ki, hogy P^* az EF egyenesen van.) Másrészt hasonlóan

$$\frac{DG}{DA} = \frac{DA'G}{DA'A} = \frac{DA'G}{DBA},$$

végül e kettőt összeszorozva GD kiesik:

$$\frac{DQ^*}{DA} = \frac{DBQ^*}{DBA} = \frac{DBE}{DBA}.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy Q^* és E valóban egyenlő távolságra vannak DB -től.

Megkaphattuk volna P_1 -et F -ből kiindulva is, F -ből AC -vel párhuzamosan haladunk BC -nek Q^{**} pontjáig és onnan ismét AB -vel párhuzamosan. Ábránkon Q^{**} a BC oldal meghosszabbításán van – hiszen Q^*Q^{**} a P^* -nál kilép a négyszögből. A további P_i pontok ($i = 2, 3, 4$) eseteinek előkészítéséül fölírjuk (1) módosulását ebben a változatban:

$$\begin{aligned} ABP^* &= ABQ^{**} = ACB + ACQ^{**} = ACB + ACF = ABCF = \\ &= BFA + BFC = (BDA + BDC)/2 = ABCD/2 = t. \end{aligned}$$

A hasonló meggondolások nem a P_i helyzete szerint alakulnak az első vagy az újabb mintára, hanem a Q -típusú segédpont helyzete szerint. Ahogyan a P_i pontok közül csak kettő lehet magán a négyszög kerületén, ugyanúgy a segédpontok közül is, akár az E -n átmenő, BD -vel párhuzamos egyenes révén szerkesztjük őket, akár az F -en átmenő, AC -vel párhuzamos révén.