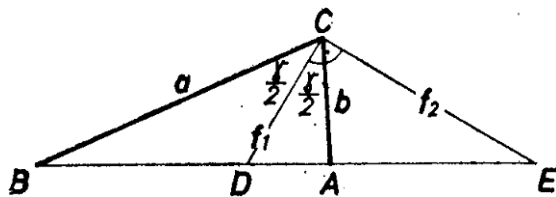


Legyen f_1 és f_2 metszéspontja az AB egyenessel D , ill. E . (E csak $a = b$ esetén nem léteznék.) Ekkor az ABC háromszög területe felírható egyrészt mint a CDA és CDB háromszögek területeinek összege, másrészt mint a CEB és CEA háromszögek területeinek különbsége.



Ha a keresett szög γ , e két egyenlőség a következő lesz:

$$af_1 \sin \frac{\gamma}{2} + bf_1 \sin \frac{\gamma}{2} = ab \sin \gamma,$$

$$af_2 \sin \left(90^\circ + \frac{\gamma}{2}\right) - bf_2 \sin \left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right) = ab \sin \gamma,$$

amiből

$$f_1 = \frac{2ab}{a+b} \cos \frac{\gamma}{2}, \quad f_2 = \frac{2ab}{a-b} \sin \frac{\gamma}{2} \quad \text{és}$$

$$(2) \quad \frac{f_2}{f_1} = \frac{a+b}{a-b} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}.$$

Ezek minden háromszögben érvényesek.

Összevetve a feltétellel:

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \sqrt{3}, \quad \frac{\gamma}{2} = 60^\circ, \quad \gamma = 120^\circ.$$

Megjegyzések. 1. Fogásszerűnek lehetne minősíteni *szakaszok*, az f -ek fenti számítását *területek* révén. Kiszámíthatók az f -szakaszok a CAC_i háromszögekből ($i = 1, 2$) a sinustétel alapján is, felhasználva az osztásarány tételét:

$$C_iA : C_iB = CA : CB, \quad AC_i = \frac{b}{c \pm b} \cdot c,$$

$$f_i \begin{cases} \sin \\ \cos \end{cases} \frac{\gamma}{2} = AC_i \sin \alpha = \frac{b}{a \pm b} c \sin \alpha = \frac{ab \sin \gamma}{a \pm b}.$$

2. Tudatosítsuk magunkban: nem egy konkrét háromszög egy kiszemelt méretét határoztuk meg – mintha a többi méret valamilyen okból nem érdekelne bennünket. A feltevésbeli kapcsolat – mint *egyetlen* ismert összefüggés a háromszögre – természetesen nem elégséges a háromszög teljes meghatározására, de speciálisan a *kérdezett szög kiszámításához* elégséges. Az (1) összefüggés a háromszögeknek egy egész osztályát jellemzi, és erre az osztályra érdekes módon a C -nél levő szög értéke közös.

Látszólag 2 mérete szerepel a háromszögeknek (1) jobb oldalán, a (2)-ben pedig 3. A következő alakítás jobban mutatja, hogy arányok kapcsolatáról van szó:

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{1 + \frac{b}{a}}{1 - \frac{b}{a}} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}.$$