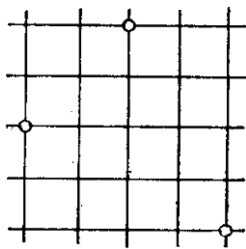


Mint ismeretes, a súlypont koordinátái a meghatározó pontok koordinátáinak számtani közepével egyenlőek. A legkönnyebben úgy érhetjük el, hogy a számtani közepek mind egészek legyenek, ha minden pont minden koordinátáját úgy választjuk meg, hogy 1 és n között minden egészszel osztható legyen. Így van ez például, ha az i -edik pont koordinátái iN -nel egyenlőek $i = 1, 2, \dots, n$ mellett, ahol N tetszőleges többszöröse az első n egésznek.

Annak érdekében, hogy a feladat második felének a megoldását előkészítsük, megmutatjuk, hogy ha n rácspontra megvan a feladat első felében mondott tulajdonsága, és k tetszőleges 1 és $n - 1$ közötti egész, akkor ha nem is feltétlenül oszthatók a pontok koordinátái k -val, de annyi mindenestre igaz, hogy k -val osztva ugyanazt a maradékot adják. (Kicsit pontosabban fogalmazva, az első koordináták egymás közt ugyanazt a maradékot adják, és ugyanez igaz a második koordinátákra is, de a kétféle koordináta maradéka már nem feltétlenül egyezik meg.) Legyen ugyanis P és Q az adott pontok közül való, első koordinátáikat jelöljük a -val, b -vel. Ha most már a többiek közül tetszés szerint kiválasztunk $(k - 1)$ -et, és ezek első koordinátáinak összegét c -vel jelöljük, akkor $(a + c)$ is, $(b + c)$ is osztható k -val, így hát a különbségük is, $(a - b)$ k -val osztható, és ez az, amit bizonyítani akartunk. (Hasonlóan mondható el a bizonyítás a második koordinátákra is.)

Most rátérünk a feladat második felében mondott állítás bizonyítására. Ha volna végtelen sok pont a mondott tulajdonsággal, közülük tetszés szerint n -et kivéve olyan pontrendszer kapnánk, amelynek megvolna a feladat első felében mondott tulajdonsága. Emiatt a végtelen sok pont első koordinátái tetszőleges k egészszel osztva ugyanazt a maradékot adnák. Ha tehát P és Q ismét két tetszőleges pont volna, közülük a , b első koordinátákkal, akkor $a - b$ tetszőleges k egészszel osztható volna. Emiatt a és b csak egyenlő lehet, ami azt jelenti, hogy a pontjaink közül bármely kettő azonos.

Megjegyzések. 1. A megoldás végén érezhető, hogy kissé hiányzik a feladat szövegéből annak explicit megkövetelése, hogy a pontok különbözőek legyenek. Ennek hiánya azonban a megoldóinknak nem okozott gondot.



2. A fenti megoldásból adódik, hogy tetszőleges n mellett egy n pontból álló, mondott tulajdonságú pontrendszerben tetszőleges két pont első, illetve második koordinátáinak különbsége 1-től $(n - 1)$ -ig minden egész számmal osztható. Azt, hogy ezeknek a különbségeknek már n -nel nem kell feltétlenül oszthatóknak lenniük, mutatja $n = 3$ -ra az ábra.

3. Az eredeti kitűzésben említés esett az 1669. gyakorlat megoldásáról (KÖMAL 54/5 (1977. május) 212. old.; az utalásban sajtóhiba miatt írtunk 56-ot kötet számnak). Ebben lényegében hasonló gondolatmenettel azt mutattuk meg, hogy ha 99 egészről tudjuk, hogy akárhogy választunk ki közülük néhányat, ezek összege nem osztható 100-zal, akkor a számaink 100-zal osztva ugyanazt a maradékot adják.