

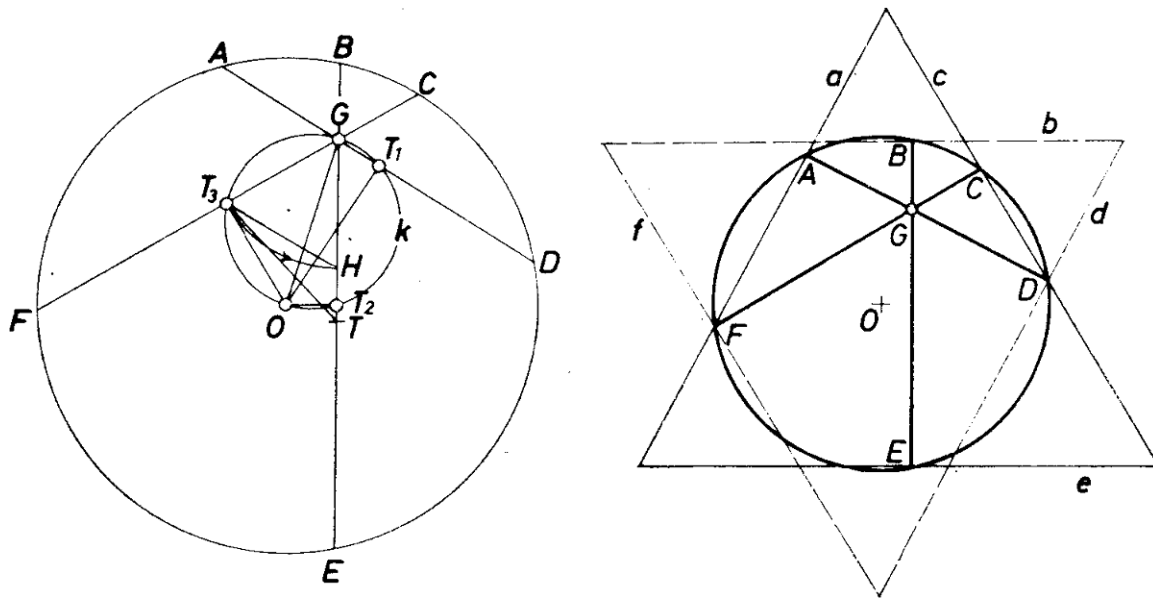
I. megoldás. Nyilvánvalóan elég foglalkoznunk a körülírt kör O középpontjától különböző G pontok esetével. Válasszuk úgy a betűzést, hogy BE legyen az O -hoz legközelebbi átló –, illetve a legközelebbiek egyike, ha több ilyen van – és EGF az a 60° -os szögtartomány, amelyiknek a belsejében van O , esetleg éppen a GE szakaszon. Jelöljük még az AD , BE , CF szakasz felezőpontját (O vetületét e húrokon) rendre T_1 , T_2 , T_3 -mal. Ekkor $OT_2 \leq OT_3$, $OGT_2 \leq OGT_3$ és $OGD \leq 90^\circ \leq OGA$, továbbá T_1 , T_2 , T_3 rendre a GD , GE , GF szakaszon van, esetleg $T_1 = G$ vagy $T_2 = O$. A bizonyítandó állítás így írható át:

$$AT_1 - GT_1 + CT_3 - GT_3 + ET_2 + GT_2 = BT_2 - GT_2 + DT_1 + GT_1 + FT_3 + GT_3,$$

és ez ekvivalens a következővel:

$$(1) \quad GT_2 = GT_1 + GT_3,$$

ezt bizonyítjuk.



T -pontjaink nyilvánvalóan az OG szakasz mint átmérő fölötti k Thalész-körön vannak. A $T_1T_2T_3$ háromszög szabályos, mert T_1T_2 és T_2T_3 oldalai G -ből $60^\circ - 60^\circ$ -os szögben láthatók. Mérjük föl G -ből T_2 felé a $GH = GT_3$ szakaszt és csatlakozóan a $HT = GT_1$ szakaszt. Így HGT_3 szabályos háromszög és $T_3HT = 120^\circ = T_3GT_1$, ezek szerint pedig a THT_3 háromszög a T_1GT_3 háromszög elfordított képe 60° -kal, ennél fogva T azonos T_2 -vel. Így pedig

$$GT = GT_2 = GH + HT_2 = GT_3 + GT_1.$$

Ezt akartuk bizonyítani és ez ekvivalens a feladat állításával.

Megjegyzés. Goniometriai bizonyítás (1)-re: legyen $GO = 1$, $GOT_1 = t$, ekkor $GOT_3 = 60^\circ - t$ és $GOT_2 = 60^\circ + t$, és ezekkel

$$\begin{aligned} GT_1 + GT_3 &= \sin t + \sin(60^\circ - t) = 2 \sin 30^\circ \cos \frac{60^\circ - 2t}{2} = \\ &= \cos(30^\circ - t) = \sin(60^\circ + t) = GT_2. \end{aligned}$$

Lényegében ez a számítás is szerepel a 3 fázisú váltakozóáram elméleti alapjai között.

II. megoldás. Állítsunk merőlegest mindegyik csúcspan az onnan induló átlóra és legyen az A -ban AD -re állított merőleges a , s i.t. Ekkor a , c és e , valamint b , d és f egy-egy háromszöget határoznak meg, és a merőleges szárú szögek alapján mindkét háromszög szabályos. Továbbá, mivel az átlók a kör húrvai, ezért az a és d , ... párok egy-egy átmérőre és egyszersmind O -ra szimmetrikusan helyezkednek el, tehát a két háromszög O -ra középpontosan szimmetrikus helyzetű, emiatt egybevágó is.

Így a bizonyítandó egyenlőség két oldalán a G pontnak a két háromszög oldalaitól való távolságainak összege áll. Ismeretes, hogy egy szabályos háromszög belsejében (vagy kerületén) bárhol veszünk is fel egy pontot, annak távolságai a három oldaltól állandó összeget adnak, ti. a magasságot. És mivel a két szabályos háromszögünk egybevágó, függetlenül attól, hogy G hogyan helyezkedik el belsejünkben, a két összeg egyenlő.

Megjegyzés. A feladat kiindulása folytán a G pont az ACE és BDF háromszögekre nézve (külön-külön) az ún. *izogondális pont*, amelyre nézve a 3 csúctól mért távolságok összege minimális.