Létezik ilyen f függvény, ennek bizonyítására elegendő egyetlen ilyet megadnunk. Legyen $f(0)=0$, $f(1)=1$ és $f(-n)=f(n)$, ha $n\geq 1$. Mielőtt f-et pozitív argumentumokra definiálnánk, legyenek $a_1<b_1<a_2<b_2<\ldots$ az összes nem-négyzetszámok (azaz $a_1=2$, $b_1=3$, $a_2=5$ stb.). Minden $n>1$ egész szám egyértelműen írható fel $a_i^{2^k}$ vagy $b_i^{2^k}$ alakban ($k=0,\ 1,\ \ldots$), hiszen ha n nem négyzetszám, akkor vagy az a_i, vagy a b_i számok között szerepel (és ekkor $k=0$). Ha pedig n négyzetszám, akkor ismételten négyzetgyököt vonva előbb-utóbb nem-négyzetszámhoz jutunk.

Legyen $f(a_i)=b_i$, $f(b_i)=a_i^2$, $f(a_i^2)=b_i^2$, általában

$$f(a_i^{2^k})=b_i^{2^k} \quad \text{és} \quad f(b_i^{2^k}=a_i^{2^{k+1}} \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \tag{1}$$

Evvel előbbi megjegyzésünk értelmében $f(n)$-et minden n-re definiáltuk. Igazoljuk még, hogy $f\left(f(n)\right)=n^2$. Ha $n=0$ vagy 1, akkor ez nyilvánvaló. Ha $n\geq 2$, akkor vagy $n=a_i^{2^k}$ valamilyen i-re és k-ra, vagy $n=b_i^{2^k}$. Az előbbi esetben (1) szerint

$$f\big(f(n)\big)=f(b_i^{2^k})=a_i^{2^{k+1}}=\left(a_i^{2^k}\right)^2=n^2,$$

míg a másik esetben ehhez hasonlóan

$$f\big(f(n)\big)=f(a_i^{2^{k+1}})=b_i^{2^{k+1}}=\left(b_i^{2^k}\right)^2=n^2.$$

Végül ha $n<0$, akkor

$$f\big(f(n)\big)=f\big(f(-n)\big)=(-n)^2=n^2,$$

amivel a feladat megoldását befejeztük.