

I. megoldás. Jelölje x a pohárban levő víz, h pedig a súlypont cm-ben mért magasságának mérőszámát. A víz fajsúlyát 1 pond/cm^3 -nek véve, h -t a fizikában tanultak alapján a következőképpen írhatjuk fel:

$$h = \frac{20x \cdot \frac{x}{2} + 200 \cdot 4,8}{20x + 200} \text{ cm} = \frac{x^2 + 96}{2(x + 10)} \text{ cm}.$$

Feladatunk annak meghatározása, hogy mely $x \geq 0$ érték esetén lesz h a lehető legkisebb. A feladatot differenciálszámítás felhasználásával oldjuk meg. A $h = h(x)$ függvény x szerinti első deriváltja:

$$h' = \frac{2x(2x + 20) - 2(x^2 + 96)}{4(x + 10)^2} = \frac{(x - 4)(x + 24)}{2(x + 10)^2}.$$

Megállapíthatjuk, hogy a derivált függvény $0 \leq x < 4$ esetén negatív, $x > 4$ esetén pedig pozitív. A számláló képe ugyanis olyan felfelé nyíló parabola, amelynek zérushelyei -24 és 4 , a nevező pedig $x \geq 0$ mellett mindig pozitív.

Ez azt jelenti, hogy a h függvény a $0 \leq x < 4$ intervallumban szigorúan monoton fogyó, a $4 < x < \infty$ intervallumban viszont szigorúan monoton növekedő. Ezért a $h = h(x)$ függvény a $0 \leq x < \infty$ intervallumbeli legkisebb értékét az $x = 4$ helyen veszi fel. Tehát 4 cm -es vízmagasság esetén lesz a súlypont a legalacsonyabban.

A $h(x)$ legkisebb értéke szintén 4 -nek adódik, vagyis a súlypont éppen a víz felszínére esik, amikor a legalacsonyabban van.

Hajnal Péter (Szeged, Radnóti M. Gimn., IV. o. t.)

II. megoldás. A $h = h(x)$ függvény minimumhelyét többféle módon meghatározhatjuk differenciálszámítás alkalmazása nélkül is: pl. a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján, vagy a másodfokú egyenlet diszkriminánsával való okoskodással. Ezeknek a matematikai módszereknek alkalmazása során lényegtelen, hogy mi a vizsgált függvény konkrét fizikai jelentése. Jelen feladatunkra viszont egy olyan megoldást is adhatunk, amely szorosan a feladat fizikai tartalmához kapcsolódik.

Az I. megoldásból ismert eredményben figyelemre méltó, hogy a súlypont a víz felszínére esik, amikor a legalacsonyabban van. Nos, ez nem véletlen. Ugyanis mindaddig, amíg a vizet a súlypont alá töltjük, a súlypont magassága állandóan csökken, míhelyt azonban a súlypont találkozik a víz felszínével, az újabb vízmennyiség a súlypontot emelni fogja, de persze úgy, hogy a súlypont a víz felszíne alatt marad. Ennek alapján a keresett vízmagasság egyszerűen az

$$\frac{x^2 + 96}{2(x + 10)} = x$$

egyenletből számítható ki az $x \geq 0$ feltétel mellett.

Tóth Viktor (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)

Megjegyzés. A pohár falvastagságát alul elhanyagoltuk. Eredményünk vastag falú pohár esetén is helyes, ha a súlypont magasságát a pohár aljának belső felületétől mérjük.