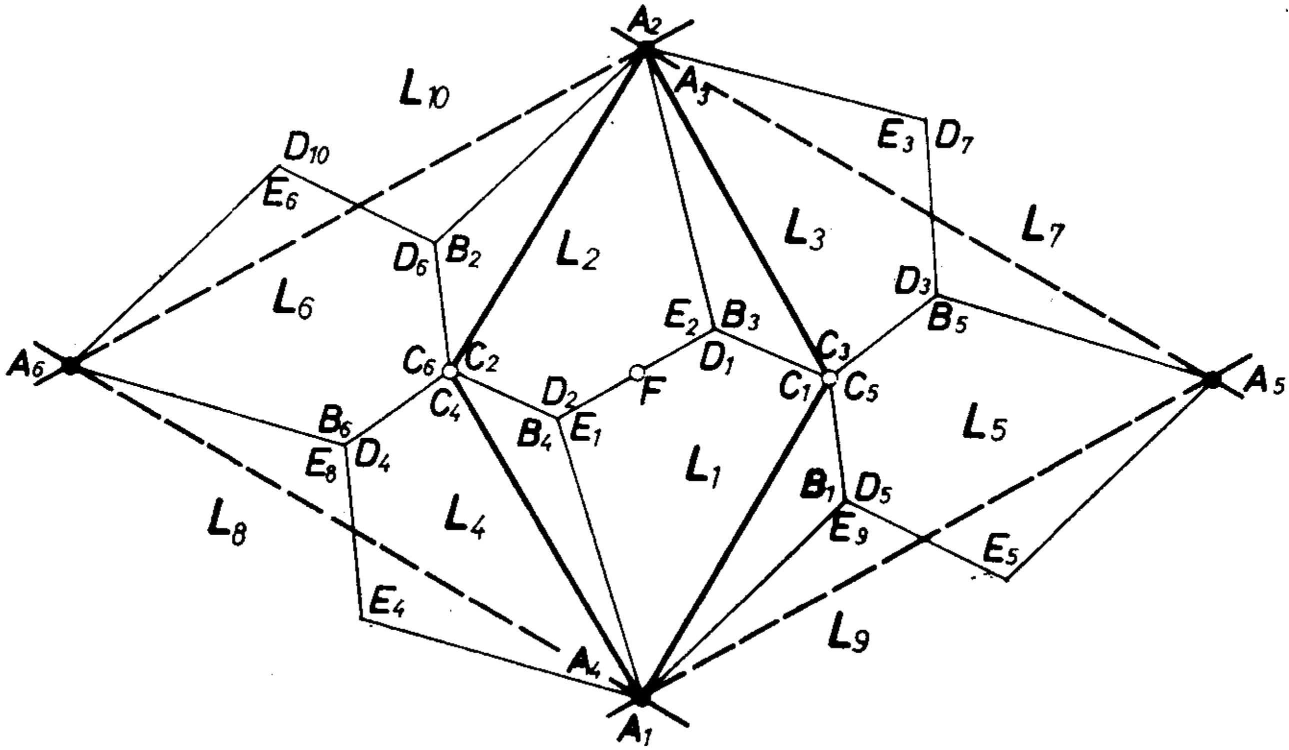
Az ötszögek alábbi lerakásában minden ötszög $ABCDE$ betűzése pozitív körüljárású lesz, és ötszög csúcsa sehol sem esik egybe másik ötszög kerületének két csúcs közé eső pontjával. Így – mivel az ötszögnek általában nincs DE-vel egyenlő oldala – egy L_1 ötszöglemez D_1 és E_1 csúcsával a D_1E_1 oldalon szomszédos $L_2(\cong L_1)$ ötszöglemezből csak az E_2, ill. D_2 csúcs eshet egybe. Eszerint L_2 az L_1 tükörképe lesz a D_1E_1 szakasz F felezőpontjára.



Letéve ezeket, a D_1, E_1 pontok környezetében marad lefedetlen szögtartomány, éspedig akkora, mint- az ötszög B-nél levő szöge, hiszen

$$ABC\sphericalangle + CDE\sphericalangle + DEA\sphericalangle = 540^\circ - (60^\circ + 120^\circ) = 360^\circ,$$
$$360^\circ - (C_1D_1E_1\sphericalangle + D_2E_2A_2\sphericalangle) = ABC\sphericalangle.$$

Eszerint a $C_1D_1A_2$ és $C_2E_1A_1$ szögtartományok lefedhetők egy L_3 és L_4 ötszög B-nagyságú szögtartományával, méghozzá ezek C- és A-típusú csúcsai éppen a C_1, A_2 pontpárba esnek, ill. L_4-éi a C_2, A_1 párba, hiszen $AE = AB$ és $CD = CB$ alapján a $C_1D_1A_2$ (más néven: $C_1E_2A_2$) és $C_2E_1A_1$ (azaz $C_2D_2A_1$) háromszögek egyező körüljárásúan egybevágók ötszögeink ABC részháromszögével. Ennélfogva $A_1C_2 = A_1C_1$, továbbá

$$C_1A_1C_2\sphericalangle = C_1A_1E_1\sphericalangle + D_2A_1C_2\sphericalangle = B_1A_1C_1\sphericalangle + C_1A_1E_1\sphericalangle = B_1A_1E_1\sphericalangle = 60^\circ,$$

tehát a centrálszimmetrikus $A_1C_1A_2C_2$ idom 60°-os szögű rombusz. Az L_3 és L_4 idomok is egymás képei az F centrumra. Azt találtuk, hogy ötszögünk 3 példánya úgy illeszthető egy pontba a B, az E, a D csúcsával (pozitív körüljárással), hogy hézagtalanul, átfedésmentesen lefedik a pont környezetét és az e pontból kiinduló, egymáshoz csatlakozó oldalszakaszok külső végpontjai is egybeesnek (rendre az A- és A-, majd D- és E-, végül a C- és C-típusú csúcsok).

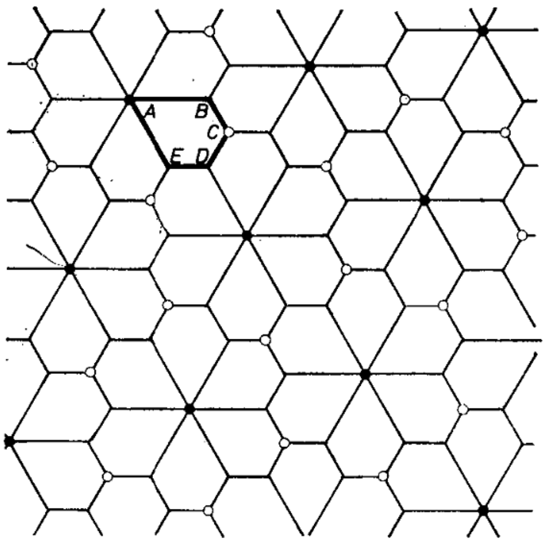
Az eddig lefedett síkrész határán C_1-ben és C_2-ben $360^\circ - 2\cdot 120^\circ = 120^\circ$ a lefedetlen szögtartomány, ezt lefedjük, ha egy L_5 idom C_5D_5 oldalát C_1B_1-re tesszük, ill. egy L_6-ból a C_6D_6 oldalt. C_2B_2-re. Más szóval: L_5 az L_1-nek, L_6 az L_2-nek elforgatottja $+120^\circ$-kal, eszerint az $A_1A_5A_2A_6$ idom rombusz, az A_1A_2 átló végpontjaiban 120°-os szögekkel.

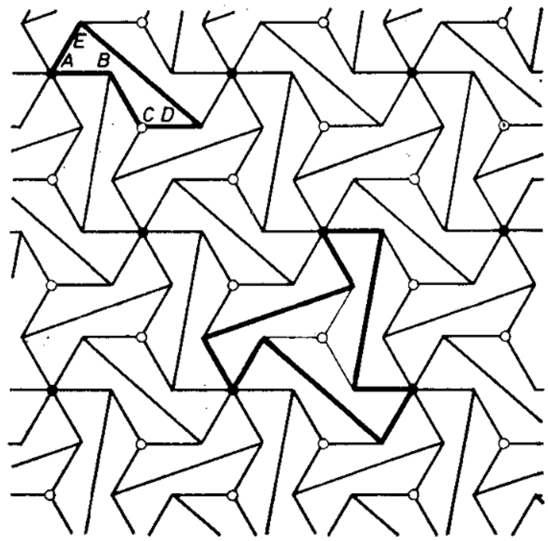
Mivel A_4E_4 (azaz A_1E_4) és A_3E_3 (azaz A_2E_3) egymás képei F-re, másrészt A_6B_6 képe az A_4E_4-nek, azért $A_2E_3 = A_3E_3$-at eltolás viszi át A_6B_6-ba, vagyis L_3-at az L_4 és L_6 közé illeszthető L_8-ba (amit E_8-nál fogva illesztünk D_4-hez). Ugyanígy az $\overrightarrow{A_6A_2}$ vektorú eltolás L_4-et ráviszi az L_3 és L_5 közé illesztett L_7-re, és hasonlóan $\pm\overrightarrow{A_5A_2}$ vektorú eltolás L_5-öt L_2 és L_6 közé L_{10}-be, L_6-ot L_1 és L_5 közé L_9-be. Mondjuk ki ezeket így: az $A_1A_5A_2A_6$ rombusz egyirányú A_1A_5 és A_6A_2 oldalai fölött keletkezett $A_1B_1E_5A_5$ és $A_6E_6B_2A_2$ „díszítmények" egymásba tolhatók, és ugyanígy a másik oldalpár díszítményei is.

Ha tehát 60°-os szögű rombuszrácsot veszünk $A_1A_2 = 2\cdot AF$ hosszúságú alapvektorokkal, és minden elemi cellájához hozzárendeljük az $L_1 - L_6$ ötszögegyüttes (= „molekula") egy másolatát, ezzel hézagtalanul és egyrétűen lefedtük a síkot, minden egyes díszítmény mindegyik foga lefedi a szomszédos foghíjait, ill. foghíját befedi a szomszéd molekula foga.

Azt is látjuk, hogy így a rombuszrács minden egyes rácspontjában $2 + 1 + 2 + 1 = 6$ db ötszög fut össze a 60°-os szögével, továbbá hogy a C pontok a rácsunkban található egységnyi oldalú szabályos háromszögek középpontjai.

Ábráink mutatják, hogy a B, D és E csúcsok mindegyikében lehet 180°-nál nagyobb szög. Egyikben $B\sphericalangle = 240^\circ$-ot vettünk, és még az $AB = BC$ speciális esetet. Két ilyen ötszög paralelogrammává egyesíthető, és így – a fönti többlettulajdonságokat föladva – végtelen sokféle lefedés készíthető belőle.

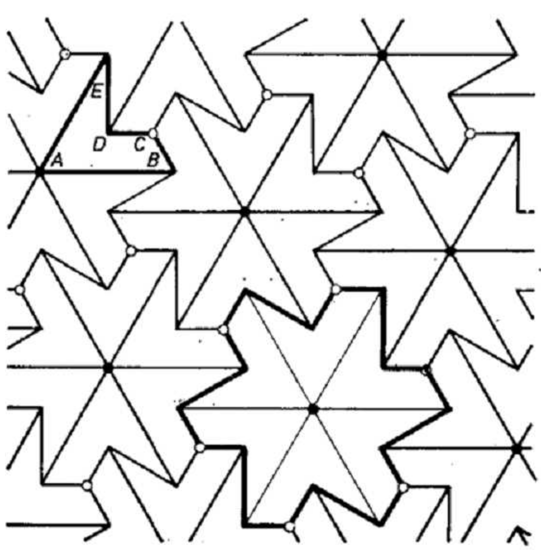


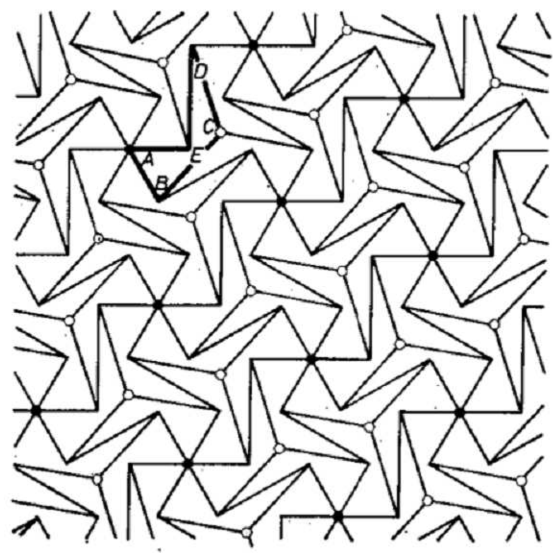


Megjegyzések. 1. Bizonyítható úgy is az állítás, hogy elindulásul – mintegy ösztönösen – 3 db ötszöglemez 120°-os szögét fogjuk össze, leírjuk az együttes határvonalát, szimmetriáját, és ezt a „molekulát" illesztjük be egy olyan rács minden egyes csomópontjába, amilyet az egybevágó szabályos hatszögekből alakuló lefedés csomópontjai alkotnak. Vagy úgy, hogy tükrözzük ezt az együttest egyik DE-típusú oldalának felezőpontjára, és a kapott, 6 atomból épült molekulát építjük be 60°-os rombuszrácsba. – Természetesen adódó molekula az A-típusú csúcsaiknál összefogott 6 db ötszög is.

2. Különösen tetszetős lefedést ad a tengelyszimmetrikusnak fölvett ötszög: $B\sphericalangle = D\sphericalangle = 120^\circ$ és $DE = CD = AB/2$. De hiába vannak tengelyes szimmetriái a rácsnak is, az eredő lefedésnek még sincsenek tengelyei, mert az A-csomók körüli 6-ágú és a C-csomók körüli 3-ágú csillagok tengelyei nem közösek.

Egészen más a „varázsa" a nem konvex alapötszögekből alakuló lefedéseknek, mélyebben egymásba fogazódásukkal. Ezek azonban már nem csak matematikai kérdések.





3. Lényeges tulajdonsága a leírt lefedésnek : bárhogyan kiválasztott két ötszögéhez van olyan transzformációja a síknak (eltolás vagy forgatás), amely az elsőt a másikba viszi és egyidejűen az egész lefedés bármelyik ötszögét egy másik (egész) ötszögébe, szóval az egész lefedést önmagába. Ismételjük kiindulásunkat is, bár kissé másképpen: lefedésünk csomópontjaiban nincs 180°-os „szög". Ezekkel az „erős" megkötésekkel vizsgálta a sík lefedését egybevágó ötszögekkel egy régebbi cikkünkben *Bollobás Béla*[1]. Feladatunkat ebből a tételéből vettük (hozzátéve a nem konvex esetek kérdését): megengedve a tengelyes tükrözést is, 4 olyan ötszögtípus – és hozzájuk alkalmas lerakásmód – van, amelyekkel a sík hézagtalanul, egyrétűen és az előbbi két megkötés mellett parkettázható.

[1] A sík lefedése egybevágó konvex sokszögekkel. 2. közlemény: Az egyenletes ötszög–parkettázások, K.M.L: 22 (1961) 193–200. oldal

Mihelyt engedünk valamit e követelményekből, mindjárt emelkedik az ötszögtípusok, lerakásmódok száma. Szép példákat láthatott erre az olvasó *dr. Perjés Zoltán*nak az Élet és Tudomány c. folyóirat 1978. évi 47. számában megjelent cikkében. (Érdekes véletlen volt a mondott cikk, másrészt ezen feladatunk majdnem „napra pontosan" egyidejű megjelenése.)

Borítólapunk hátoldalán más típusú lefedés látható egyenlő oldalú ötszögekből, szögeik rendre 60°, 160°, 80°, 100°, 140°. (Itt kicsinyítve látható.) (A New South Wales-i Parabola alapján, vö. F. 2191. is).