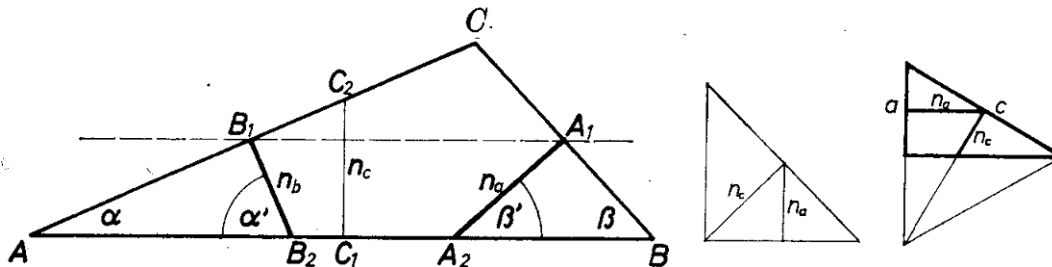


I. megoldás. 1. A szokás szerint megbetűzött ABC háromszögben az n_a szakasz a $BC = a$ oldal A_1 felezőpontjából indul, A_2 végpontja pedig az A -ból B -be vivő oldalon van, mert $c > b$, azaz $AB > AC$ miatt B van a felező merőlegesnek A -val ellentétes oldalán. Hasonlóan AB -n van $n_b = B_1B_2$ végpontja. Így n_a is, n_b is az A_1B_1 és AB párhuzamos egyenesek egy-egy pontját köti össze. Az egyenespárral alkotott β' , ill. α' hajlásszögekre (1. ábra)

$$\beta' = 90^\circ - \beta < 90^\circ - \alpha = \alpha'$$

– ugyanis az adott nagyságviszony alapján a $\alpha < \beta < \gamma$, és így $\beta < 90^\circ$ –, ezért valóban a laposabban hajló A_1A_2 nagyobb B_1B_2 -nél.



A második állítás a C_1C_2A és B_1B_2A háromszögek hasonlóságából következik, ugyanis az előzőkhöz hasonló megfontolás szerint C_2 az AC oldalon van; $AC_1 = c/2 > b/2 = AB_1$ miatt a megfelelő másik befogókra $C_1C_2 > B_1B_2$.

2. Az n_a és n_c szakaszok nagyságviszonyáról csak azt mondhatjuk, hogy mindhárom lehetőség fennáll. Elég ennek igazolására számpéldákat (ill. példatípusokat) mutatnunk. Speciálisan derékszögű háromszögeket választunk, ezekben $c = 1$ megválasztással $n_c = a/2b$ és $n_a = b/2$. Köztük egyenlőség áll, ha $b_0^2 = a_0$, amikor a Pitagorasz-tétel alapján $a_0^2 + a_0 = 1$, ennek az egyenletnek a pozitív gyöke

$$\sin \alpha_0 = a_0 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0,618,$$

és ekkor $\alpha_0 < 45^\circ < \beta_0$, mert mint könnyen megmutatható,

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45^\circ.$$

Ha most $\alpha > \alpha_0$, de még $\alpha < 45^\circ$, akkor

$$\frac{1}{\sqrt{2}} > a > a_0 \quad \text{és} \quad b_0 = \cos \alpha_0 > \cos \alpha = b > \frac{1}{\sqrt{2}},$$

ezért

$$b^2 < b_0^2 = a_0 < a$$

és

$$n_c = \frac{a}{2b} > \frac{a_0}{2b} > \frac{a_0}{2b_0} = n_{c0} = n_{a0} = \frac{b_0}{2} > \frac{b}{2} = n_a.$$

(A föltevésünk érvényességét határoló $a = b$ esetben $n_c = \sqrt{2}n_a$.)

Ha viszont $\alpha < \alpha_0$, speciálisan $\alpha = 30^\circ$ mellett n_a fele akkora, mint az 1 oldalú szabályos háromszög magassága, n_c viszont harmada annak. Ekkor valóban $\alpha < \alpha_0$, mert $\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$. – Mindhárom nagyságviszony esetére példát adtunk, állításunkat igazoltuk.

II. megoldás. A háromszög bármelyik oldalát kiválasztva, annak oldalfelező merőlegese a másik két oldal közül mindig a hosszabbat metszi, mert a szemben fekvő csúcs azon a félsíkon van, amelyiken az oda vivő rövidebbik oldal. Így az n_a és n_b szakaszokat a c oldal, az n_c -t pedig a b oldal fogja határolni. Kifejezhetők tehát a szakaszok az oldalak és a szögek segítségével a következőképpen:

$$n_a = \frac{a \operatorname{tg} \beta}{2}, \quad n_b = \frac{b \operatorname{tg} \alpha}{2}, \quad n_c = \frac{c \operatorname{tg} \alpha}{2}.$$

Felhasználjuk még, hogy $a = 2r \sin \alpha$, $b = 2r \sin \beta$, $c = 2r \sin \gamma$. Ezekkel a szakaszok páronkénti arányai

$$\frac{n_a}{n_b} = \frac{a \operatorname{tg} \beta}{b \operatorname{tg} \alpha} = \frac{a \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{b \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \right) \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} > 1,$$

mert a föltevés szerint $\alpha < \beta (< \gamma)$ mindkettő hegyesszög; másrészt

$$\frac{n_c}{n_b} = \frac{c \operatorname{tg} \alpha}{b \operatorname{tg} \alpha} = \frac{c}{b} > 1.$$

Ezzel az állítás két egyenlőtlenségét beláttuk.

Végül a kérdéses nagyságviszony vizsgálata céljára a $2 \sin x \cos y = \sin(x + y) + \sin(x - y)$ azonosság alapján így alakíthatjuk a két szakasz arányát:

$$\begin{aligned} \frac{n_c}{n_a} &= \frac{\sin \gamma \operatorname{tg} \alpha}{\sin \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{\sin \gamma \cos \beta}{\cos \alpha \sin \beta} = \\ &= \frac{\sin(\gamma + \beta) + \sin(\gamma - \beta)}{\sin(\beta + \alpha) + \sin(\beta - \alpha)} = \frac{\sin \alpha + \sin(\gamma - \beta)}{\sin(\beta - \alpha) + \sin \gamma}. \end{aligned}$$

A számláló és a nevező tagjai pozitívok. Elérhető, hogy ugyanaz a nagyságviszony álljon fenn elől álló tagjaik közt, mint másodiknak írt tagjaik közt, és ekkor ugyanez teljesül n_c és n_a közt is. Mármost

$$\sin(\gamma - \beta) > \sin \gamma \quad \text{és} \quad \sin \alpha > \sin(\beta - \alpha)$$

egyidejű teljesüléséhez elegendő, ha $\gamma > 135^\circ$ és $\alpha > \beta - \alpha$, vagyis $2\alpha > \beta > \alpha$, az ellentétes nagyságviszony pedig mindig beáll, ha $2\alpha < \beta < \gamma < 90^\circ$. Könnyen találhatók e feltételeknek eleget tevő α , β , γ értékhármasok.

Ezek után azt már fölösleges keresnünk, beállhat-e $n_a = n_c$.