Olyan b_i egész számokat keresünk, melyekre $5a_i^2-1=b_i^2$, vagyis olyanokat, amelyekre az (a_i, b_i) számpár megoldása az

$$5x^2-y^2=1 \tag{1}$$

egyenletnek. A Pell-egyenletekről szóló cikkünk befejező részében láttuk (56. kötet, 193. oldal, 1978), hogyan kaphatjuk meg az (1) egyenlet összes megoldását. Az $x_1=1$, $y_1=2$ pár megoldás, és általában, ha x_n és y_n olyan egészek, hogy $(2+\sqrt{5})^n=y_n+x_n\sqrt{5}$, akkor könnyen igazolhatóan $(2-\sqrt{5})^n=y_n-x_n\sqrt{5}$, amiből

$$y_n^2-5x_n^2=(y_n+x_n\sqrt{5})(y_n-x_n\sqrt{5})=(2+\sqrt{5})^n\cdot(2-\sqrt{5})^n=(-1)^n.$$

Tehát (1) további megoldásai $x_3=17$, $y_3=38$; $x_5=305$, $y_5=682$ stb. Ezt összevetve az $a_2=1$, $a_3=17$, $a_4=305$ értékekkel, azt sejtjük, hogy $a_i=x_{2i-3}$. Ha ezt igazoljuk, készen vagyunk; bebizonyítottuk, hogy $5a_i^2-1$ négyzetszám, mégpedig a $b_i=y_{2i-3}$-nak a négyzete.

Láttuk, hogy $a_i=x_{2i-3}$ az $i=2,\ 3,\ 4$ értékekre igaz. így elegendő megmutatnunk, hogy az x_i számok kielégítik az

$$x_{n+4}=18x_{n+2}-x_n \tag{2}$$

rekurzív összefüggést. Az $x_n$és y_n definíciója szerint

$$y_{n+2}+x_{n+2}\sqrt{5}=(2+\sqrt{5})^2(y_n+x_n\sqrt{5})=(20x_n+9y_n)+(9x_n+4y_n)\sqrt{5},$$

tehát $x_{n+2}=9x_n+4y_n$; $y_{n+2}=20x_n+9y_n$. Ezekből $x_{n+4}=9x_{n+2}+4y_{n+2}$, majd ebből x_{n+2} kifejezésének 9-szeresét levonva és y_{n+2} kifejezésének 4-szeresét hozzáadva:

$$x_{n+4}-9x_{n+2}+4y_{n+2}=(9x_{n+2}+4y_{n+2})-9(9x_n+4y_n)+4(20x_n+9y_n),$$

ami éppen (2)-t adja.