

Két szám utolsó n jegye akkor és csak akkor egyezik meg, ha különbségük osztható 10^n -nel. Így azt kell bizonyítanunk, hogy $a_{n+1} - a_n$ osztható 10^n -nel. Az

$$a_{k+1} - a_k = a_k^2 - a_{k-1}^2 = (a_k + a_{k-1})(a_k - a_{k-1})$$

összefüggést $k = n, n-1, \dots, 3$, 2-re felírva kapjuk, hogy

$$(1) \quad a_{n+1} - a_n = (a_n + a_{n-1}) \cdot \dots \cdot (a_3 + a_2) \cdot (a_2 + a_1) \cdot (a_2 - a_1).$$

a_i mindegyike 5-nek valamilyen pozitív egész kitevős hatványa, ezért 5-re végződik. Így (1) jobb oldalán mindegyik tényező 0-ra végződik, azaz osztható 10-zel. S mivel a tényezők száma n , a szorzatuk osztható 10^n -nel, amit bizonyítanunk kellett.

Megjegyzés. $n \geq 3$ -ra a_n és a_{n+1} utolsó $n+1$ jegye is megegyezik, hiszen (1) utolsó 3 tényezőjének szorzata nemcsak 10^3 -nal, hanem 10^4 -nel is osztható. Másrészt a_n és a_{n+1} utolsó $n+2$ jegye semmilyen n -re sem egyezhet meg, hiszen 2^{n+2} nem osztója $(a_{n+1} - a_n)$ -nek.

Hidas Pál (Budapest, I. István Gimn., III. o. t.)