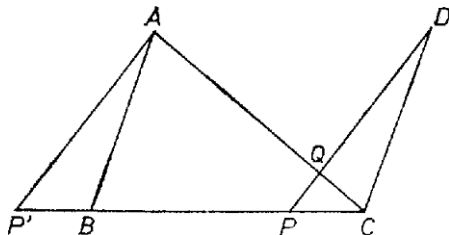


I. megoldás. Jelöljük az A, B, C, P, Q , pontok (és minden további pont) helyvektorát a megfelelő kis betűvel. Ekkor

$$\mathbf{p} = x\mathbf{b} + (1-x)\mathbf{c}, \quad \mathbf{q} = \frac{x}{1+x}\mathbf{a} + \frac{1}{1+x}\mathbf{c}.$$



A PQ egyenest t : $(1-t)$ arányban osztó D pontra

$$\mathbf{d} = (1-t)\mathbf{p} + t\mathbf{q} = \frac{tx}{1+x}\mathbf{a} + (1-t)x\mathbf{b} + \left(1-x + \frac{x^2t}{1+x}\right)\mathbf{c}.$$

Olyan x -től függő t osztóviszonyt keresünk, amelyik mellett $\mathbf{d}$ független x -től, hiszen ekkor lesz a megfelelő D pont helyzete állandó. Ez így lesz akkor, ha $\mathbf{d}$ kifejezésében $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ együtthatója állandó lesz, azaz

$$\frac{tx}{1+x} = \alpha, \quad (1-t)x = \beta, \quad 1-x + \frac{x^2t}{1+x} = \gamma.$$

Ebből először is

$$\alpha x + 1 - x = \gamma$$

következik, ami állandó α, γ és változó x mellett csak $\alpha = \gamma = 1$ esetén lehetséges. Tehát

$$t = \frac{1+x}{x},$$

és így $\beta = -1$, a PQ egyenes x megválasztásától független D pontjának a helyvektora

$$\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}.$$

Ha origónak a B pontot választjuk, $\mathbf{b} = 0$ és $\mathbf{d} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$, tehát a $\overrightarrow{BD}$ vektor a $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ vektorok összege, vagyis az A, B, C, D pontok (ebben a sorrendben) egy paralelogramma csúcsai.

II. megoldás. Toljuk el a P pontot a $\overrightarrow{CB}$ vektorral a P' helyzetbe. Így $PP' = CB$, és az előírt megválasztás szerint

$$\frac{CP}{PP'} = \frac{CP}{CB} = \frac{CQ}{QA},$$

és ismert tétel szerint PQ párhuzamos $P'A$ -val.

Toljuk most vissza P' -t P -be, és toljuk vele a $P'BA$ háromszöget. Így a $P'A$ egyenes rájut a PQ egyenesre, BA a C -n átmenő, BA -val párhuzamos egyenesre és A új helyzete az a D pont, amelyre $CD \parallel BA$, vagyis az $ABCD$ paralelogramma negyedik csúcsa. Itt a PQ egyenes minden figyelembe veendő x érték mellett átmegy, az állítást bebizonyítottuk.

Németh Ágnes (Zalaegerszeg, Zrínyi M. Gimn. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Bizonyításunk a CB egyenes minden P pontjára érvényes (kivéve mégis C -t), ha a szakaszoknak előjelet tulajdonítunk és Q -t ennek megfelelően választjuk az AC egyenesen.

2. Ajánljuk az érdeklődőknek annak a kapcsolatnak az átgondolását, ami fennáll tételünk és a „Z alakú szorzó-osztó nomogramok” között. (Lásd pl. Matematika, a mat. osztályok számára, III. köt., 433. old.)