

**I. megoldás.** Vizsgáljunk az eredeti feladat helyett egy hozzá hasonlót: vegyünk fel egy kört. Jelöljük meg ennek egy pontját, írjunk ide egy 1-et. Ezután végezzük a felezéseket az eredeti feladat szerint, értelemszerűen itt nem szakaszokat, hanem köríveket felezve. Mindegyik felezés során az összes, előző lépésben létrejött ívet megfelezzük, és olyan számokat írunk a felezőpontokhoz, amelyek mindegyike két korábbi szomszédos szám összege. Minden korábbi pont két körív végpontja, azaz minden szám pontosan kétszer szerepel összeadandóként. Így az új számok összege az eredetinek éppen kétszerese, vagyis egy felezés során az összes megháromszorozódik, tehát egymillió felezés után az összeg  $3^{10^6}$ .

Térjünk most vissza az eredeti feladathoz! Ha a felezések után a körívet „kiegyenesítjük”, az eredeti 1-esnél elvágva éppen a feladatban szereplő szakaszhoz jutunk. A különbség csak az, hogy így egy 1-es helyett kettőt kapunk, a két végponton. Így a feladat megoldása:  $3^{10^6} + 1$ .

**II. megoldás.** Egyszerűen oldható meg a feladat teljes indukcióval is. Ha a  $k$ -adik felezés után az összeg  $s_k$ , a következő lépésben a számok összege 2 hóján 3-szorosára növekedik, mivel a két szélső 1-es csak egy összegben szerepel, tehát  $s_{k+1} = 3 \cdot s_k - 2$ . Bizonyítjuk, hogy  $s_k = 3^k + 1$ . Ez  $k = 1$ -re igaz, hiszen  $s_1 = 4 = 3^1 + 1$ . Feltesszük, hogy ha  $k$ -ra igaz, ebből  $(k + 1)$ -re is következik:

$$s_{k+1} = 3 \cdot (3^k + 1) - 2 = 3^{k+1} + 1.$$

Ebből pedig  $s_{1\,000\,000} = 3^{10^6} + 1$ .