

Azt mondjuk, hogy egy nyelv prefix, ha megvan a feladatban szereplő tulajdonsága. Tegyük fel, hogy a mumbo-jumbo törzs nyelvénél kevesebb betűvel nem állítható össze egy k szavas prefix nyelv teljes szójegyzéke. Egy A -ból és O -ból álló sorozat szabad, ha nem állítható elő úgy, hogy egy mumbo-jumbo szó végéről néhány betűt elhagyunk. Jelöljük a legrövidebb szabad sorozat hosszát h -val, a leghosszabb szót H -val. Mivel a nyelv szavai szabad sorozatok, $h \leq H$.

Legyen p egy tetszőleges H betűs szó, és \bar{p} az a sorozat, amelyet p -ből úgy kapunk, hogy utolsó betűje helyére a másik betűt tesszük. Ha \bar{p} nem lenne szó, p -nek elhagyhatnánk az utolsó betűjét, és a nyelv prefix maradna. Ez viszont ellentmondana annak a feltevésünknek, hogy kevesebb betűvel már nem lehet prefix szójegyzéket összeállítani, \bar{p} tehát szó.

Tegyük fel először, hogy $h = H$. Ekkor minden H elemű sorozat szó, különben az utolsó betűjét elhagyva is szabad sorozatot kapnánk. Tehát $k = 2^H$, és a teljes szójegyzék kH , betűből áll.

Megmutatjuk, hogy ha $h < H$, akkor a különbségük csak 1 lehet. Ebben az esetben ugyanis minden h elemű szabad sorozat szó, különben egy tetszőleges H betűs szóra kicserélve csökkenthetnénk a betűk számát a szójegyzékben. Ha viszont p egy h betűs szó és qA , qO is H betűs szavak, akkor ezeket a pA , pO , és q szavakra cserélve a nyelv prefix maradna, és a betűk száma ismét csökkenne a szójegyzékben, mihelyt $H - h > 1$ volna.

Ha tehát $h < H$, akkor h értéke csak $(H - 1)$ lehet. Jelöljük a h elemű szabad sorozatok számát s -sel. A többi h elemű sorozatból az A és O betűk hozzáírásával $2 - 2^H$ betűs szót kapunk. Emiatt

$$k = s + 2(2^h - s) = 2^H - s,$$

és a teljes szójegyzék

$$hs + H(2^h - s) = kH - s$$

betűből áll, összefoglalva eredményeinket, elmondhatjuk, hogy ha 2^H a legkisebb 2-hatvány, amelyik nem kisebb k -nál, akkor a mumbo-jumbo nyelv szójegyzéke legalább

$$kH + (2^H - k)$$

betűből áll.

Megjegyzés. Könnyű a minimális szójegyzéket explicite megadni. Megoldásunkban erre nem volt szükség, hiszen enélkül is tudjuk, hogy van minimális szójegyzék, és ennek betűszámát sikerült egyértelműen meghatározni anélkül, hogy a minimális szójegyzék konkrét alakját ismertük volna.