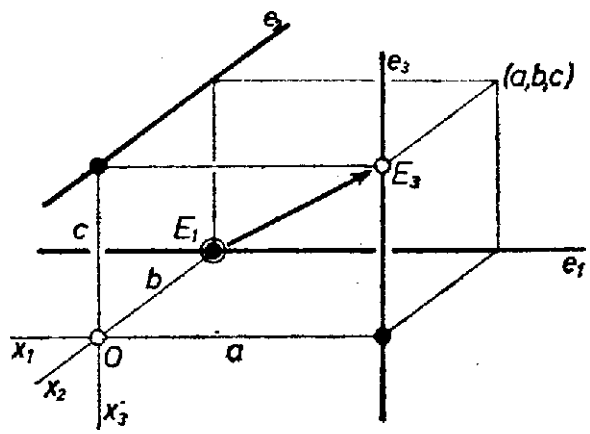
I. megoldás. Tegyünk magunk elé egy téglatestet a szokásos beállításban. Ekkor egy, a föltevéseknek eleget tevő egyeneshármast alkot a hátsó alapél (e_1), a bal oldali fedőél (e_2) és az elülső jobb oldalél (e_3) *(1. ábra). Vegyük egy (térbeli) derékszögű koordináta-rendszer O origójául a bal elülső alsó csúcsot és az x_1, x_2, x_3 tengelyeket rendre e_1, e_2, e_3-mal párhuzamosnak, továbbá legyenek a téglatest O-val átellenes csúcsának koordinátái a, b, c (egyik sem 0, különben legalább 2 tükrözési tengelyünk metszené egymást).*



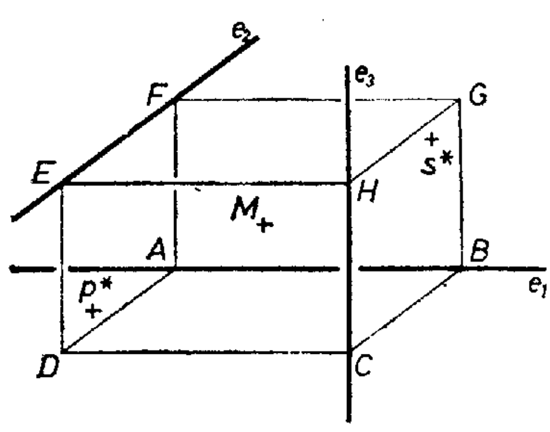
Egy térbeli pontnak egy egyenesre való tükrözése csupán síkbeli feladat, megkeressük a pontnak az egyenesre való vetületét és arra mint centrumra tükrözünk. – A $T(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ tárgypontnak a $C(u,\ v,\ w)$ pontra való tükörképe pedig a $K(2u-\alpha,\ 2v-\beta,\ 2w-\gamma)$ pont, így lesz ugyanis $\overrightarrow{CK}=\overrightarrow{TC}$.

Esetünkben a $P(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ pontnak e_1-re való tükrözésében a centrum $(a,\ b,\ 0)$, hiszen $PC\perp e_1$ miatt PC párhuzamos az x_2x_3 síkkal, az első koordináta egyezik P első koordinátájával, másrészt e_1-nek az x_2x_3 koordinátasíkra való vetülete a $(0,\ b,\ 0)$ pont, és így e_1 minden pontjának 2. és 3. koordinátája b, ill. 0. Így $Q(-\alpha,\ 2b-\beta,\ -\gamma)$. Hasonlóan e_2-nek az x_1x_3 síkra, majd e_3-nak az x_1x_2 síkra való vetülete a $(0,\ 0,\ c)$, ill. az $(a,\ 0,\ 0)$ pont, ezért a második centrum $(0,\ 2b-\beta,\ c)$, tehát $R(-\alpha,\ 2b-\beta,\ 2c+\gamma)$, végül a 3. centrum $(a,\ 0,\ 2c+\gamma)$ és végeredményünk $S(2a+\alpha,\ -2b+\beta,\ 2c+\gamma)$.

Ezek szerint S koordinátái a P koordinátáiból rendre a $2a$, $-2b$, $2c$ állandó (azaz P-től független szám) hozzáadásával állnak elő. Ez eltolást jelent, az eltolás vektorának komponensei éppen ezek a szakaszok. A vektort a maga egészében is szemléltethetjük a téglatesttől függetlenül is: $2\overrightarrow{E_1E_3}$, ahol E_1 az e_1-ből a rá merőleges, e_2-n átmenő sík metszi ki, és ugyanígy keletkezik E_3, az 1-es index helyett 3-ast írva. Más szóval: e_1-nek e_2-höz legközelebbi pontjából a legrövidebb úton átmegyünk e_2-re – ami e_3 irányú, $|c|$ nagyságú elmozdulás –, innen e_2-n átmegyünk ennek e_3-hoz legközelebbi pontjába – ami e_2 irányú, $|b|$ nagyságú elmozdulás, egyébként ugyanekkora az e_1 és e_3 távolsága —, végül ismét legrövidebben e_2-ről e_3-ra; az eltolásvektor az elmozdulások eredőjének 2-szerese.

Megjegyzések. 1. E_1 és E_3 leírásából látjuk, hogy adott e_1, e_2, e_3 egyenes-hármas egyértelműen meghatározza a felhasznált téglatestet.

2. Nem tetszetős, hogy az eredményben a b koordináta eltérő szerepet kapott az a és c egyező szerepétől. Ez azonban nem az origó helyének megválasztásán múlt, sem a tengelyek irányításán – egyébként a tengelyekre nem is mondtunk ki irányítást, ahogy a, b, c-re sem mondtuk, hogy pozitívok volnának. Ha a rendszert később választjuk az alakzathoz, az eredmény soha nem függhet a megválasztástól. És az sem lényeges, hogy a és c szerepe egyezőnek látszik, az $\overrightarrow{E_1E_3}$ irányításában már más az e_1 és e_3 szerepe. Az eredmény csak a tükrözések sorrendjén múlik, más sorrend mellett a téglatest másik-másik irányított testátlója adná az eltolásvektor felét, az a testátló azonban nem szerepelhet, amelyiknek egyik végpontja sincs rajta e_1, e_2, e_3 valamelyikén.



II. megoldás. *Az e egyenesre való tükrözést tekinthetjük az e mint tengely körüli, 180°-os elfordításnak is (a két forgási irány bármelyike mentén). A tengely körüli, 2φ szögű elfordítás pedig felfogható két síkon való egymás utáni tükrözésnek, mindkét sík átmegy a tengelyen, az első tükörsíkot a másodikba átvivő elfordítás szöge φ, az irányt is beleértve; az egyik tükörsík a tengelyen át tetszés szerint választható. Esetünkben, $\varphi = 90^\circ$ alapján, a tükrözések sorrendje lényegtelen. (Mindezek könnyen beláthatók a megfelelő – ismert – síkbeli tételek alapján.)*

Állítsuk elő ismét az előbbi téglatestet: vegyük e_1, e_2, e_3 mindegyikén át azt a 2 síkot, amely merőleges a másik két tükrözési tengelyre. (Bármelyik ilyen 2 sík egymástól különböző, különben az egyenesek nem lennének páronként kitérők.) Legyen az $ABCDEFGH$ téglatesten a 3 tükrözési tengely rendre AB, EF és CH (2. ábra), ekkor a kívánt tükrözéssorozat eredménye ugyanaz, mint a test

$$ABF,\ ABD;\quad FEA,\ FEH;\quad HCD,\ HCB$$

lapsíkjain való tükrözés eredménye. Könnyű belátni, hogy az első három tükrözés eredménye a 3 sík közös A pontjára való tükrözés, a további háromnak az eredménye pedig a H-ra való tükrözés. Így már az AH testátló és a P pont síkjában leírható a kívánt eljárás eredménye.

Most már az ismert (síkbeli) tétel alapján úgy kapjuk S-et P-ből, hogy ezt az első centrumból a másodikba vivő $\overrightarrow{AH}$ vektor 2-szeresével eltoljuk.

Érdekes, egyszerű példa, ha P-ként a téglatest M középpontjának A-ra való tükörképéből indulunk ki.

Vigassy Lajos