

I. megoldás. A feltételekből következik, hogy $-x_2 = x_1 + x_3$, valamint $-y_2 = y_1 + y_3$. Ezeket összeszorozva, majd a további $-x_2y_2 = x_1y_1 + x_3y_3$ feltétellel összehasonlítva kapjuk a

$$(2) \quad 2x_2y_2 = x_1y_3 + x_3y_1$$

összefüggést. Hasonlóan igazolható az is, hogy

$$(3) \quad 2x_1y_1 = x_2y_3 + x_3y_2.$$

(1) helyett előbb belátjuk, hogy

$$(4) \quad \frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + \frac{y_1^2}{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} = \frac{x_2^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + \frac{y_2^2}{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} = \frac{x_3^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + \frac{y_3^2}{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}.$$

Például az első egyenlőséget átrendezve elegendő igazolnunk a

$$2x_1^2y_1^2 + x_1^2y_3^2 + x_3^2y_1^2 - 2x_2^2y_2^2 - x_2^2y_3^2 - x_3^2y_2^2 = 0$$

egyenlőséget. (2)-t és (3)-t behelyettesítve, majd némi átalakítás után

$$(x_1y_3 - x_3y_1 + x_2y_3 - x_3y_2)(x_1y_3 - x_3y_1 - x_2y_3 + x_3y_2) = 0.$$

Ám itt az első tényező valóban nulla, hiszen

$$\begin{aligned} x_1y_3 - x_3y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 &= y_3(x_1 + x_2) - x_3(y_1 + y_2) \\ \text{és } x_1 + x_2 &= -x_3, \quad \text{valamint } y_1 + y_2 = -y_3. \end{aligned}$$

Ezek után (1) abból következik, hogy a (4)-ben szereplő kifejezések összege 2.

Horváth Ákos (Zalaegerszeg, Zrínyi M. Gimn., III. o. t.)

II. megoldás. Legyen $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = A$, $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = B$, továbbá

$$a_i = \frac{x_i}{\sqrt{A}}, \quad b_i = \frac{y_i}{\sqrt{B}}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Feltevéseink új jelöléseinkkel azt jelentik, hogy

$$(2) \quad a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0,$$

új változóinkra még az is teljesül, hogy

$$(3) \quad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1.$$

A bizonyítandó (1) összefüggés pedig

$$(4) \quad a_1^2 + b_1^2 = \frac{2}{3}.$$

Elegendő tehát azt bizonyítani, hogy a (2) és (3) összefüggésekből következik (4).

Ha \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} a tér páronként merőleges egységvektorai, és

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}, \\ \mathbf{b} &= b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}, \\ \mathbf{c} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}, \end{aligned}$$

akkor \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} is egységvektorok. Például \mathbf{a} első koordinátája, a_1 azt jelenti, hogy \mathbf{a} vetülete \mathbf{i} -n $a_1\mathbf{i}$. Itt azonban az \mathbf{a} és \mathbf{i} egységvektorok szerepe még szimmetrikus, tehát szerepüket felcserélve azt kapjuk, hogy \mathbf{i} vetülete \mathbf{a} -n $a_1\mathbf{a}$, és így $b_1\mathbf{i}$ vetülete \mathbf{a} -n $a_1b_1\mathbf{a}$. Mivel vektorok összegének vetülete egyenlő a vetületek összegével, ezek szerint \mathbf{b} -nek \mathbf{a} -n levő vetülete

$$(5) \quad (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)\mathbf{a}.$$

Tehát (2) utolsó összefüggése azt jelenti, hogy \mathbf{b} vetülete \mathbf{a} -n a null-vektor, vagyis \mathbf{b} merőleges \mathbf{a} -ra. Az első két összefüggés pedig azt jelenti (2)-ben, hogy \mathbf{a} is, \mathbf{b} is merőleges \mathbf{c} -re.

Ezek szerint (2) azt jelenti, hogy \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} is páronként merőlegesek egymásra. Mivel \mathbf{i} vetülete \mathbf{a} -n $a_1\mathbf{a}$, \mathbf{b} -n $b_1\mathbf{b}$, \mathbf{c} -n $\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{c}$, és ezeknek a vetületeknek az összege épp az \mathbf{i} vektort adja:

$$\mathbf{i} = a_1\mathbf{a} + b_1\mathbf{b} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{c},$$

a bizonyítandó (1) összefüggés pedig a térbeli Pithagorasz-tételből és abból következik, hogy \mathbf{i} egységvektor.

Megjegyzés. A feladat szövegében – mint azt többen észrevették – sajtóhiba volt. A versenyzők zöme az itt közölt állítást igazolta. Teljes értékű megoldásnak fogadtuk el azt is, ha valaki az eredeti állítás hibás voltát igazolta.