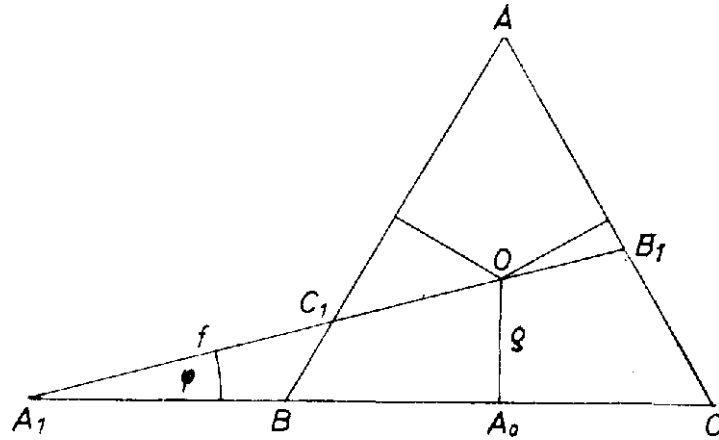


Egyrészt a szabályos háromszög, másrészt a kérdéses szorzat szimmetriája alapján egy f egyenessel együtt szimmetrikus képein ugyanannyi a szorzat értéke. Elkerülhetjük az ismétlődéseket a következő megállapodással: legyenek a háromszög kerületének f -en levő pontjai B_1 és C_1 , továbbá legyen A_1 a BC oldal B -n túli meghosszabbításán, esetleg éppen B -ben.



Jelöljük az OA_1C szöget φ -vel ($0 < \varphi \leq 30^\circ$), ekkor a B_1A_1C háromszögre a külső szög tételét alkalmazva $OB_1A \sphericalangle = \varphi + 60^\circ$, továbbá $OC_1B \sphericalangle = \varphi + 120^\circ$ és $OC_1A \sphericalangle = 60^\circ - \varphi$. Az OA_1A_0 derékszögű háromszögben a φ -vel szemben fekvő OA_0 befogó ρ , a beírt kör sugara. Így és hasonlóan

$$OA_1 \cdot OB_1 \cdot OC_1 = \frac{\rho^3}{\sin \varphi \sin (60^\circ + \varphi) \sin (60^\circ - \varphi)},$$

tehát a szorzat olyan φ mellett minimális, amely mellett a nevezőbeli szorzat maximális. Mármost

$$\begin{aligned} \sin \varphi \{ \sin (60^\circ + \varphi) \cdot \sin (60^\circ - \varphi) \} &= \frac{\sin \varphi}{2} \{ \cos (60^\circ + \varphi - (60^\circ - \varphi)) - \\ &\quad - \cos (60^\circ + \varphi + 60^\circ - \varphi) \} = \frac{\sin \varphi}{2} (\cos 2\varphi - \cos 120^\circ) = \\ &= \frac{\sin \varphi}{2} \left(1 - 2 \sin^2 \varphi + \frac{1}{2} \right) = (3 \sin \varphi - 4 \sin^3 \varphi) = \frac{1}{4} \sin 3\varphi, \end{aligned}$$

és ez nyilvánvalóan $\sin 3\varphi = 1$, $3\varphi = 90^\circ$, $\varphi = 30^\circ$ mellett maximális, ekkor A_1 azonos B -vel, f azonos az itt átmenő szimmetriatengellyel, a szögek 30° , 30° , 90° .

A szorzat akkor a 2-szerese a minimális értéknek, ha a nevező fele akkora, $\sin 3\varphi = \frac{1}{2}$, $\varphi = 10^\circ$, a további két szög 70° és 50° .