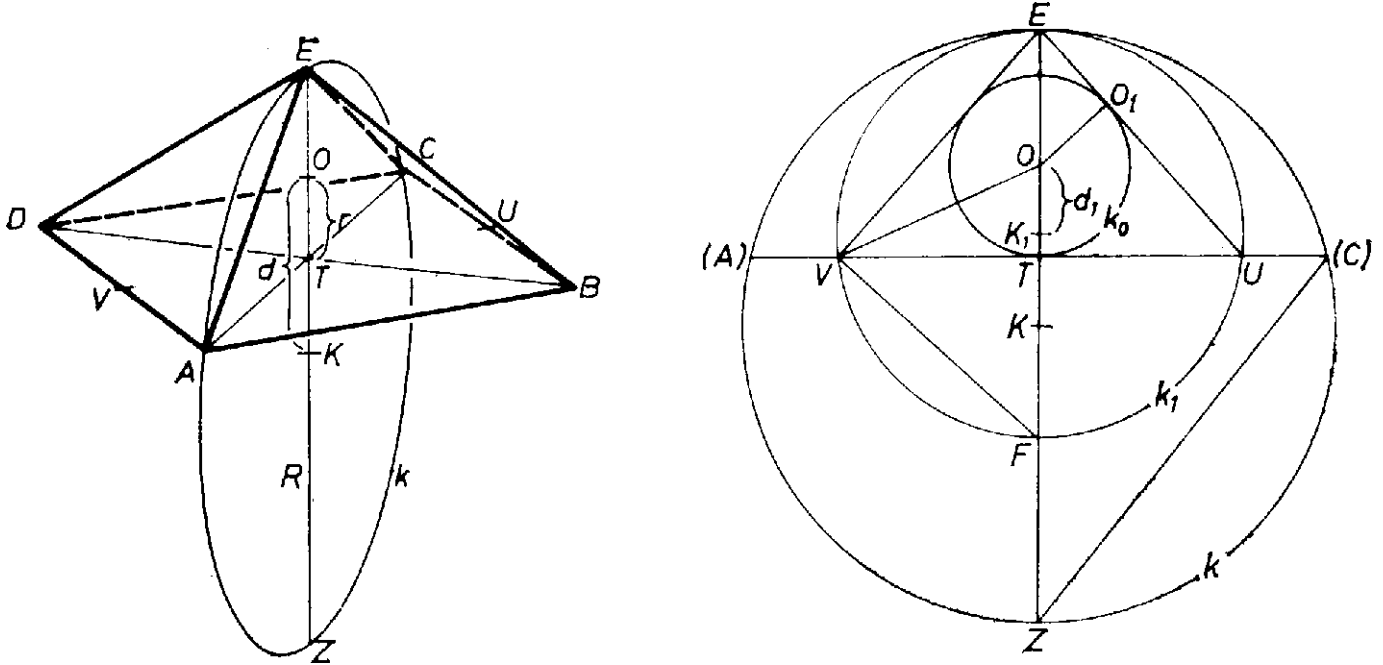


Jelöljük az alap csúcsait A, B, C, D -vel, középpontját T -vel, a gúla ötödik csúcsát E -vel, a beírt gömböt G_0 -lal, középpontját O -val, a körülírt gömböt G -vel, középpontját K -val. Mivel a gúla egyenes, és alapja szabályos sokszög, O és K rajta van az ET egyenesen. Emellett K -t egyértelműen meghatározza az, hogy G átmeny az A, C, E pontokon. Jelöljük a BC, DA szakaszok felezőpontját U -val, V -vel. Mivel a gúla szimmetrikus az UVE síkra, G_0 az UVE háromszög oldalain érinti az oldalakat tartalmazó lapokat. Más szóval G_0 -ból az UVE sík az UVE háromszögbe írt k_0 kört metszi ki.



Jelöljük az UVE háromszög köré írt kört k_1 -gyel, középpontját K_1 -gyel, sugarát R_1 -gyel, az E -vel átellenes pontját F -fel. Az FOV háromszögben

$$\begin{aligned} 2FVO \angle &= UVE \angle + UEV \angle, \\ 2FOV \angle &= 180^\circ - UVE \angle = VUE \angle + UEV \angle, \end{aligned}$$

emiatt $OF = VF$. Jelöljük még O -nak UE -n levő vetületét O_1 -gyel. Mivel az EFV, EOO_1 háromszögek hasonlóak,

$$VF : EF = OO_1 : EO,$$

vagyis $EO \cdot OF = EO \cdot VF = EF \cdot OO_1 = 2rR_1$. Jelöljük a K_1O szakasz hosszát d_1 -gyel, akkor az EO, OF szakaszok közül az egyik hossza $(R_1 + d_1)$, a másiké $(R_1 - d_1)$, tehát

$$(2) \quad R_1^2 - d_1^2 = 2rR_1.$$

Ez Euler tétele, és ugyan a levezetésében részben kihasználtuk, hogy UVE egyenlő szárú, valójában erre nem volt szükségünk, mint ismeretes, meggondolásunk tetszőleges háromszögre kiterjeszthető.

Jelöljük G -nek az ACE síkkal alkotott metszés vonalát k -val, k -nak E -vel átellenes pontját Z -vel. Ekkor

$$ET \cdot TZ = TC^2 = 2TU^2 = 2ET \cdot TF,$$

tehát $TZ = 2TF$. Emiatt

$$2R_1 = EF = 2R - FZ = 2R - TF = 2R + r - OF,$$

és így (2) alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} R^2 - d^2 &= EO \cdot OZ = EO \cdot OF + EO \cdot OF - EO \cdot OT = \\ &= r(2R + r - OF) + 2rR_1 - r \cdot EO = r(2R + r) + r(2R_1 - OF - EO). \end{aligned}$$

Mivel $EO + OF = 2R_1$, itt az utolsó tag 0, tehát épp azt kaptuk, amit bizonyítani akartunk.

A most bizonyított (1) összefüggés alapján ha $R = 1$, akkor $(1 + r)^2 = 2 - d^2$, tehát $(1 + r)^2$ maximuma 2, r maximuma $\sqrt{2} - 1$. Ez akkor érhető el, ha $d = 0$, vagyis K és O egybeesik. Ugyanazt kaptuk tehát, mint a F. 2096. megoldásában (KÖMAL 1978. január, 6–7. oldal).