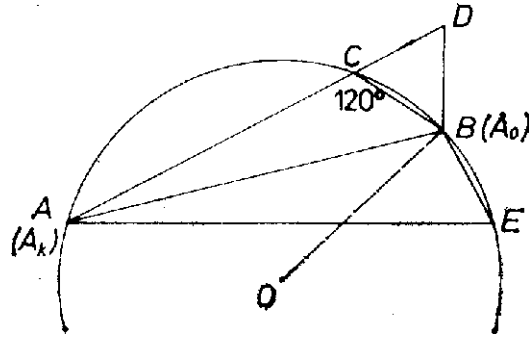


Néhány próba alapján ezt sejtjük: olyan két átló összege egyenlő egy harmadikkal, amelyek közti szög 120° . (ti. ha a két átlót a szabályos $3k$ -szög egy csúcsából a két ellentétes körüljárási irányban választjuk meg, „lokalizáljuk”). Ezt fogjuk bizonyítani.



Legyen az ABC háromszögben a C -nél levő szög 120° , továbbá $CA \geq CB$, az AC oldal C -n túli meghosszabbításán D az a pont, amelyre $CD = CB$, végül D tükörképe az AB egyenesre E . Ekkor a BCD háromszög egyenlő oldalú, ezért egyrészt $AEB \sphericalangle = ADB \sphericalangle = 60^\circ = 180^\circ - ACB \sphericalangle$; tehát az $EACB$ négyszög húrnégyszög, E rajta van az ABC háromszög körülírt körén, másrészt $AE = AD = AC + CB$.

Megmutatjuk, hogy a szabályos $3k$ -szög $A_0, A_1, A_2, \dots, A_k, A_{k+1}, \dots, A_{3k-1}$ csúcsai közül lehet kiválasztani olyan négyet, amelyeknek átadhatjuk az előbbi A, C, B és E pont szerepét. Nyilvánvalóan megfelel az $A = A_k, B = A_0$ választás, mert így a rövidebbik $AB = A_k A_0$ ívhez tartozó középponti szög $A_0 O A_k \sphericalangle = k \cdot \frac{360^\circ}{3k} = 120^\circ$, a hosszabbik $A_k A_0$ ívhez tartozó középponti szög 240° , így a rövidebb $A_0 A_k$ ív minden belső C pontjára $A_0 C A_k \sphericalangle = 120^\circ$. Itt C szerepére alkalmas minden olyan A_i csúcs, amely nem szomszédos sem A_0 -lal, sem A_k -val, azaz amelyekre $A_i \neq A_1$ és $A_i \neq A_{k-1}$, vagyis amelyekre $2 \leq i \leq k-2$. Ilyen sokszögcsúcs van, ha $k-2 \geq 2$, azaz $k \geq 4$, továbbá ekkor E is sokszögcsúcs, hiszen C tükörképe a BO sugarra.

Feladatunk a $k > 4$ reláció bizonyítása volt. A $k = 4$ esetben két egyenlő hosszú átló összege egyenlő az $A_0 A_4$ átlóval. Az állítás $k > 4$ -re tulajdonképpen ezt mondja: van *kétféle* olyan átlóhosszúság, amely ...; hiszen természetes, hogy szabályos sokszögben mindenféle átlóhosszúság annyi példányban van meg, mint az oldalak száma – nyilvánvalóan kivéve a páros $2m$ oldalszámú sokszög leghosszabb átlóit, átmérőit: $A_0 A_m, A_1 A_{m+1}, \dots, A_{m-1} A_{2m-1}$, amelyekből csak m példány van.

Megjegyzések. 1. A megfelelő átlópárokat csak egyszer kapjuk meg, ha $2 \leq i \leq \frac{k}{2}$, tehát számuk $\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor - 1$.

2. Lényegben ugyanez a bizonyítás, ha arra hivatkozunk, hogy a szabályos ABF háromszög köré írt kör bármely P pontjára a PA, PB, PF szakaszok közül a két kisebb együttvéve egyenlő a legnagyobbikkal.

3. Több dolgozat használta fel Ptolemaiosz (I.) tételét (konvex húrnégyszög átlóinak szorzata egyenlő a két-két szemben fekvő oldalból képezett szorzatok összegével).

4. Bizonyítható az állítás goniometria úton is, annak fölhasználásával, hogy a szabályos $3k$ szög átlójára

$$A_0 A_i = 2r \sin \frac{i}{2} \cdot \frac{360^\circ}{3k} = 2r \sin \frac{i}{k} \cdot 60^\circ, \quad (i = 1, 2, \dots, 3k-1).$$