

Mindkét egyenlőtlenség bizonyításához a számtani és a mértani közép közötti összefüggést használjuk fel. Először a $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{n+1}{n}$ számok számtani, ill. mértani közepét írjuk fel:

$$(2) \quad \sqrt[n]{n+1} \leq \frac{\frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{n+1}{n}}{n} = 1 + \frac{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{n},$$

amiből (1) első fele azonnal adódik. Valamennyi tag különböző, egyenlőség nem állhat fenn, tehát valamivel többet sikerült belátni, mint amit a feladat megkívánt.

A második egyenlőtlenséghez az $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n-1}{n}$ számok számtani, ill. mértani közepére van szükségünk:

$$(3) \quad \sqrt[n-1]{\frac{1}{n}} \leq \frac{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \dots + \frac{n-1}{n}}{n-1} = \frac{n - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)}{n-1},$$

amiből (1) másik felét kapjuk. $n = 2$ esetben (3) jobb oldalán egyetlen tag szerepel, egyenlőség áll fenn. $n \geq 3$ esetén valamennyi tag különböző, határozott egyenlőtlenség teljesül.

Mala József (Cegléd, Kossuth L. Gimn., III. o. t.)