

I. megoldás. Vezessük be az $x = \alpha + 60^\circ$, $y = \beta + 60^\circ$ és $z = \gamma + 60^\circ$ jelöléseket. Mivel α , β és γ egy háromszög szögei, $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, ezért $x + y + z = 360^\circ$. A

$$\cos z = \cos [360^\circ - (x + y)] = \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

összefüggés alapján (1) a következő alakot ölti :

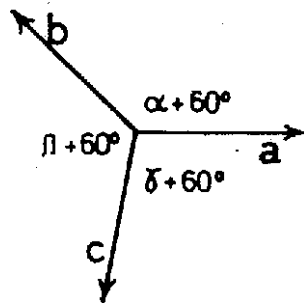
$$\cos x + \cos y + \cos x \cos y - \sin x \sin y + \frac{3}{2} \geq 0.$$

Az egyenlőtlenség mindkét oldalát 2-vel megszorozva és 3 helyébe $(1 + \sin^2 x + \cos^2 x + \sin^2 y + \cos^2 y)$ -t írva, a bizonyítandó egyenlőtlenségünk így alakul:

$$1 + 2 \cos x + 2 \cos y + \cos^2 x + 2 \cos x \cos y + \cos^2 y + \sin^2 x - 2 \sin x \sin y + \sin^2 y = \\ (1 + \cos x + \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2 \geq 0.$$

Lengvárszky Zsolt (Pécs, Komarov Gimn., III. o. t.)

II. megoldás.



Az **a**, **b**, **c** egységvektorokra legyen

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b})^\angle = \alpha + 60^\circ,$$

$$(\mathbf{b}, \mathbf{c})^\angle = \beta + 60^\circ,$$

$$(\mathbf{c}, \mathbf{a})^\angle = \gamma + 60^\circ.$$

Ez lehetséges, mivel $(\alpha + 60^\circ) + (\beta + 60^\circ) + (\gamma + 60^\circ) = 360^\circ$ (1. ábra). Vegyük az $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ vektor önmagával alkotott skaláris szorzatának felét. Erre nyilván

$$\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})^2 \geq 0.$$

Ha a négyzetre emelést elvégezzük, és figyelembe vesszük, hogy $\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2 = 1$, valamint $\mathbf{ab} = \cos(\alpha + 60^\circ)$, $\mathbf{bc} = \cos(\beta + 60^\circ)$ és $\mathbf{ac} = \cos(\gamma + 60^\circ)$, éppen a bizonyítani kívánt egyenlőtlenséget kapjuk.

Németh Csóka Mihály (Bp., Móricz Zs. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzés. Egyenlőség csak akkor következik be, ha $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$, ami viszont csak akkor teljesül, ha $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$