

I. megoldás. A Gausztól származó

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

azonosságot először az $a = n$, $c = n + 1$, $b = d = 1$ választással felírva

$$(1) \quad (n^2 + 1) \left((n + 1)^2 + 1 \right) = (n^2 + n + 1)^2 + 1,$$

másodszor az $a = n$, $c = n - 1$, $b = d = 1$ választással felírva;

$$(2) \quad (n^2 + 1) \left((n - 1)^2 + 1 \right) = (n^2 - n + 1)^2 + 1.$$

Tegyük fel, hogy valamilyen k -ra már találtunk olyan n -et, amire $n^2 + 1$ osztható 5^k -nal. (Például $k = 1$ -re $n = 2$ vagy $n = 3$; $k = 2$ -re $n = 7$ megfelel.) Az $n^2 + 1 = (n - 2)(n + 2) + 5$ felírás alapján ez az n szám 5-tel osztva csak 2 vagy 3 maradékot adhat. Ha a 2 maradék, akkor $(n + 1)^2 + 1$ osztható 5-tel, ha 3 a maradék, akkor $(n - 1)^2 + 1$ osztható 5-tel. Így vagy (1) vagy (2) bal oldala – és ezzel együtt jobb oldala is – osztható 5^{k+1} -nel. Tehát $(k + 1)$ -hez is találtunk megfelelő számot, amivel a feladat állítását igazoltuk.

II. megoldás (vázlat). Belátjuk, hogy ha 5^k osztója $(n^2 + 1)$ -nek, akkor $(n^5)^2 + 1$ osztható 5^{k+1} -nel. Ebből az I. megoldásban leírtakhoz hasonlóan már következik a feladat állítása. Legyen tehát $n^2 + 1 = M \cdot 5^k$ (M egész), akkor

$$(3) \quad \begin{aligned} (n^5)^2 + 1 &= (n^2)^5 + 1 = (M \cdot 5^k - 1)^5 + 1 = \\ &= 5^{k+1} (M^5 \cdot 5^{4k-1} - M^4 \cdot 5^{3k} + 2M^3 \cdot 5^{2k} - 2M^2 \cdot 5^k + M). \end{aligned}$$

A zárójelben $k \geq 1$ miatt egész szám áll, ami pontosan a mondott oszthatóságot jelenti.

Megjegyzés. A II. megoldásban igazolt állítás 5 helyett tetszőleges p páratlan prímszámmal elmondható. Ezt a Skljarszkij–Csencov–Jaglom: Válogatott feladatok és tételek I. kötetének 246. példájával összevetve kapjuk a következő állítást:

Minden $4t + 1$ alakú p prímszámhoz és minden k természetes számhoz van olyan n természetes szám, amire $(n^2 + 1)$ osztható p -nek k -adik hatványával. Igazolható továbbá az is, hogy ha p $4t + 3$ alakú prímszám, akkor $(n^2 + 1)$ sohasem lehet osztható p -vel (és így p^k -nal sem).