

I. megoldás. Jelöljük a vizsgált kifejezést $f(x)$ -szel. Az $f(x)$ minden valós x számra értelmezve van, hiszen a gyökjelek alatt különböző számok négyzetösszege szerepel, ami mindig pozitív. Így $f(x)$ értéke is mindig pozitív. Nem negatív számok körében a négyzetre emelés monoton művelet, ezért $f^2(x)$ ugyanott minimális, ahol $f(x)$.

$$f^2(x) = \left(\sqrt{2x^2 + 1 + 2x} + \sqrt{2x^2 + 1 - 2x} \right)^2 = 4x^2 + 2 + 2\sqrt{4x^4 + 1}.$$

Erről a kifejezésről közvetlenül megállapítható, hogy legkisebb értékét $x = 0$ -nál veszi fel.

Piros Sándor (Debrecen, Fazekas M. Gimn., III. o. t.)

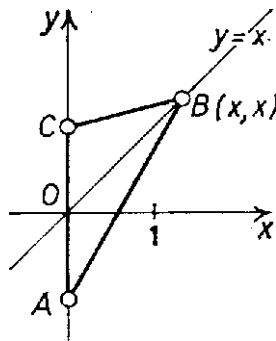
II. megoldás. Tekintsük azt a háromszöget, amelynek csúcsai a síkbeli (x, y) derékszögű koordináta-rendszerben $A(0; -1)$, $B(x; x)$, $C(0; 1)$ (l. ábra). A háromszög egyenlőtlenség alapján

$$AC \leq AB + BC.$$

Az egyenlőtlenségben szereplő távolságokat a koordinátákkal kifejezve

$$2 \leq \sqrt{x^2 + (x+1)^2} + \sqrt{x^2 + (x-1)^2}$$

adódik. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha az ABC háromszög elfajul, és B az AC oldalszakasz pontja.



Ha x változik, B az $y = x$ egyenes mentén mozog. Az egyenlőség tehát akkor és csak akkor következik be, ha B az origóban van, vagyis $x = 0$. Mivel az egyenlőtlenség jobb oldalán éppen a vizsgált kifejezés szerepel, ezzel a feladat kérdésére meg is adtuk a választ.

Az egyenlőtlenség bal oldalán a minimum értéke is – mintegy magától – előbukkant.

Ármós Lajos (Debrecen, Fazekas M. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzés. A közölt megoldás alapján a feladat könnyen általánosítható.

III. megoldás (vázlat). A feladatot a differenciálszámítás felhasználásával oldjuk meg. Az $f(x) = \sqrt{x^2 + (x+1)^2} + \sqrt{x^2 + (x-1)^2}$ minden valós x számra értelmezett folytonos és differenciálható függvény, deriváltja

$$f'(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{2x^2+2x+1}} + \frac{2x-1}{\sqrt{2x^2-2x+1}}.$$

Ez szintén mindenütt értelmezett és folytonos függvény.

Az $f'(x) = 0$ egyenletet megoldva egyetlen gyök, $x = 0$ adódik. Mivel a derivált függvény folytonos, a $(-\infty; 0)$ és a $(0; \infty)$ intervallumban állandó előjelű; $f'(-1) = -1 - \frac{3}{\sqrt{5}} < 0$ és $f'(1) = \frac{3}{\sqrt{5}} > 0$ alapján $(-\infty; 0)$ -ban negatív, $(0; \infty)$ -ben pozitív. Ezek szerint $f(x)$ a $(-\infty; 0)$ -ban fogyó, a $(0; \infty)$ -ben növekedő. Így $f(x)$ -nek $x = 0$ -nál abszolút minimuma van.

Spilkó József (Tatabánya, Árpád Gimn., IV. o. t.)