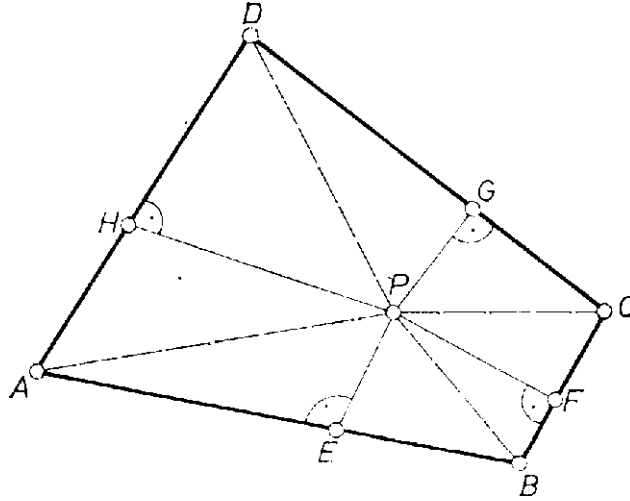


Pitagorasz tételét felírva az AEP , BFP , CGP , DHP , valamint EBP , FCP , GDP , HAP derékszögű háromszögekre (1. ábra), fejezzük ki az állítás bal és jobb oldalán álló összeadandókat:

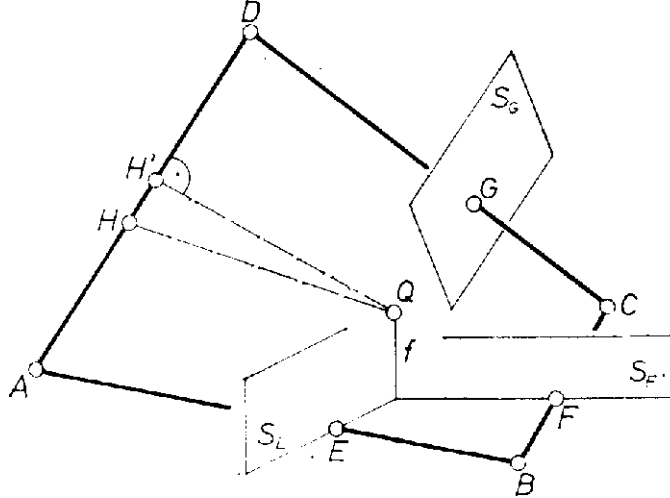
$$\begin{aligned} AE^2 &= AP^2 - PE^2, & EB^2 &= BP^2 - PE^2, \\ BF^2 &= BP^2 - PF^2, & FC^2 &= CP^2 - PF^2, \\ CG^2 &= CP^2 - PG^2, & GD^2 &= DP^2 - PG^2, \\ DH^2 &= DP^2 - PH^2, & HA^2 &= AP^2 - PH^2. \end{aligned}$$

A bal és a jobb oldalon álló tagok helyébe a fenti különbségeket írva látható, hogy valóban fennáll az egyenlőség.



1. ábra

Vizsgáljuk most a feladat második részét! Megmutatjuk, hogy a szereplő feltételek mellett igaz az első részben bizonyított tétel megfordítása, azaz ha teljesül (1), akkor a kérdéses síkok egy ponton mennek át.



2. ábra

Az E -n átmenő, AB egyenesre merőleges és az F -en átmenő, BC egyenesre merőleges síkok különbözők és nem párhuzamosak, mivel az A, B, C pontok nincsenek egy egyenesen (különben ugyanis A, B, C, D egy síkban lennének). E két sík tehát metszi egymást, legyen metszévonaluk f (2. ábra). Hasonlóan a G -n átmenő, DC egyenesre merőleges sík nem tartalmazza f -et és nem párhuzamos f -fel, f tehát dőfi ezt a síkot, legyen a dőféspont Q . Ekkor Q vetülete az AB, BC, CD egyenesen rendre E, F, G . Legyen a Q pontnak az AD egyenesen levő vetülete H' . Ekkor az első rész állítása szerint

$$(2) \quad AE^2 + BF^2 + CG^2 + DH'^2 = EB^2 + FC^2 + GD^2 + H'A^2.$$

(1) és (2) különbségét képezve rendezés után kapjuk, hogy

$$(3) \quad DH^2 - HA^2 - DH'^2 - H'A^2 = 0.$$

A távolságokat előjeles távolságoknak tekintve, és felhasználva, hogy $DH + HA = DH' + H'A = DA$, kapjuk, hogy $DH' = DH$, azaz $H' = H$.

Tehát a H -n átmenő és az AD egyenesre merőleges sík is átmegy a Q ponton, vagyis a négy vizsgált sík egy ponton megy át.