I. megoldás. Jelöljük a keresett ABC háromszögben az adott AB oldal hosszát c-vel, felezőpontját C_1-gyel, az adott CC_1 súlyvonal hosszát s_c-vel, a további két s_a és s_b súlyvonal összegét g-vel, a súlypontot S-sel. A súlypont ismert harmadoló tulajdonsága alapján elegendő az $AB = c$ alaphoz úgy meghatározni S-et, hogy $SC_1 = \frac{s_c}{3}$ és $SA + SB = \frac{2g}{3}$ legyen, ezután C az S-nek 3-szorosra nagyított képe a C_1-ből mint centrumból. Ezzel két mértani helyet kaptunk S-re: a C_1 körüli $\frac{s_c}{3}$ sugarú k kört és azt az e ellipszist, amelynek fókuszai A és B, nagytengelyének hossza $\frac{2g}{3}$.

A k és e mértani helyek centruma közös, mindkettő tükrös az AB egyenesre és az AB szakasz felező merőlegesére, tehát bármelyik két közös pontjuk tükrözéssel egymásba átvihető. Ezért a feladatnak lényegében 1 megoldása van, ha létezik közös pont, különben nincs megoldása.

Közös pont létezéséhez nyilvánvalóan szükséges a következő két föltétel teljesülése, és egyben elegendő is: $AS+BS > AB$ azaz $\frac{2g}{3} - c > 0$; a kör átmérője essék e-nek kis– és nagytengelye közé:

$$\sqrt{\frac{4g^2}{9} - c^2} \leq \frac{2s_c}{3} < \frac{2g}{3},$$

az átmérő a kistengellyel egyenlő is lehet – ekkor egyenlő szárú háromszöget ad a közös S pont –, de a nagytengellyel nem, mert úgy a közös pont az AB egyenesre esnék.

Ez az elvi megoldás azonban nem követhető eukleidészi szerkesztéssel, mert e-ből csak véges számú pontot tűzhetünk ki. Emiatt számítással készítjük elő a szerkesztést.

Egyszerűsitésül előbb az $x^2 + y^2 = r^2$ egyenletű körrel és az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ egyenletű ellipszissel foglalkozunk. Közös pontjuk koordinátái abszolút értékben:

$$x = a\sqrt{\frac{r^2 - b^2}{a^2 - b^2}}, \quad y = b\sqrt{\frac{a^2 - r^2}{a^2 - b^2}}.$$

(Az ordinátát csak avégett írtuk fel, hogy $y \neq 0$ esetére lássuk a fentire vezető $b \leq r < a$ föltételt.)

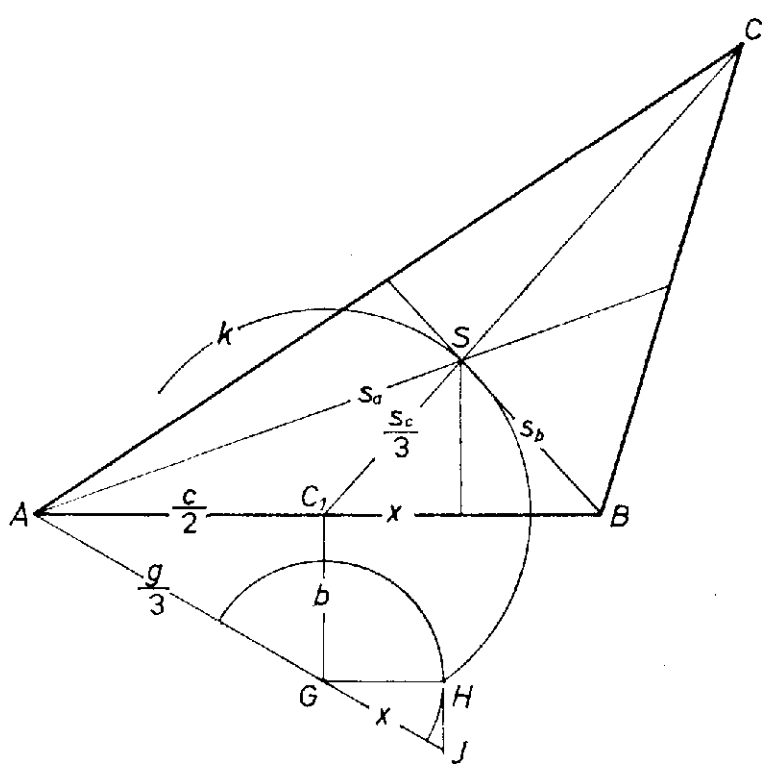
Esetünkben

$$a = \frac{g}{3}, \quad b^2 = \left(\frac{g}{3}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2, \quad a^2 - b^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2, \quad r^2 = \frac{s_c^2}{9},$$

és így

$$x\sqrt{r^2 - b^2} = \frac{g}{3} : \frac{c}{2},$$

ezek alapján szerkesztésünk a következő:



Az $AB = c$ szakasz felező merőlegesét metsszük az A körüli, $\frac{g}{3}$ sugarú körrel a G pontban, így $C_1G = b$; a G-n átmenő, AB-vel párhuzamos egyenesből a k körrel kimetsszük azt a H pontot, amelyre $HB < HA$, így $GH = \sqrt{r^2 - b^2}$; az AG egyenest metsszük a H-n átmenő, AB-re merőleges egyenessel J-ben, ekkor a párhuzamos szelők tétele alapján $GJ = x$. Ezután x-et felmérjük a C_1B szakaszra, a végpontjában AB-re állított merőleges k-ből kimetszi S-et. Innen már láttuk a befejezést.

II. megoldás. Kiszámítjuk az $SA = \frac{2}{3}s_a$ szakaszt (és vele tulajdonképpen $SB = \frac{2}{3}s_b$-t is, mondhatjuk így is: a fönti ellipszisben az S pont vezérsugarait) a súlyvonalaknak a háromszög a, b, c oldalaival való ismert összefüggései [1] alapján. Látni fogjuk, hogy a nagyobbik vezérsugár egyenlő a föntiek szerint már rendelkezésünkre álló AG és GH szakaszok összegével (a kisebbik pedig ezek különbsége). Ekkor S-et a fönti k körből az A körüli SA sugarú körrel metszhetjük ki. s_a és s_b a következő másodfokú egyenlet gyökei:

$$u^2 - (s_a + s_b)u + s_a s_b = u^2 - gu + s_a s_b = 0.$$
$$2u_{12} = g \pm \sqrt{g^2 - 4s_a s_b}.$$

Ezekhez

$$s_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2), \quad s_b^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2), \quad s_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2);$$

tehát

$$2s_a s_b = (s_a + s_b)^2 - (s_a^2 + s_b^2) = g^2 - \frac{1}{4}(4c^2 + a^2 + b^2) = g^2 - c^2 - \frac{1}{4} \cdot \frac{4s_c^2 + c^2}{2},$$
$$g^2 - 4s_a s_b = -g^2 + \frac{9}{4}c^2 + s_c^2 = 9\left\{\left(\frac{s_c}{3}\right)^2 - \left[\left(\frac{g}{3}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2\right]\right\},$$

így a két vezérsugár nagyobbika valóban

$$\frac{2}{3}s_a = \frac{g}{3} + \sqrt{\left(\frac{s_c}{3}\right)^2 - \left[\left(\frac{g}{3}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2\right]} =$$
$$= AG + \sqrt{C_1H^2 - (AG^2 - AC_1^2)} = AG + \sqrt{C_1H^2 - C_1G^2} = AG + GH,$$

amint állítottuk.

[1] Ha C tükörképe C_1-re C^*, akkor a CAC^*B paralelogrammában az átlók négyzetösszege egyenlő az oldalak négyzetösszegével.