**I. megoldás.** Jelöljük a keresett $ABC$ háromszögben az adott $AB$ oldal hosszát $c$-vel, felezőpontját $C_1$-gyel, az adott $CC_1$ súlyvonal hosszát $s_c$-vel, a további két $s_a$ és $s_b$ súlyvonal összegét $g$-vel, a súlypontot $S$-sel. A súlypont ismert harmadoló tulajdonsága alapján elegendő az $AB = c$ alaphoz úgy meghatározni $S$-et, hogy $SC_1 = \frac{s_c}{3}$ és $SA + SB = \frac{2g}{3}$ legyen, ezután $C$ az $S$-nek 3-szorosra nagyított képe a $C_1$-ből mint centrumból. Ezzel két mértani helyet kaptunk $S$-re: a $C_1$ körüli $\frac{s_c}{3}$ sugarú $k$ kört és azt az $e$ ellipszist, amelynek fókuszai $A$ és $B$, nagytengelyének hossza $\frac{2g}{3}$.

A $k$ és $e$ mértani helyek centruma közös, mindkettő tükrös az $AB$ egyenesre és az $AB$ szakasz felező merőlegesére, tehát bármelyik két közös pontjuk tükrözéssel egymásba átvihető. Ezért a feladatnak lényegében 1 megoldása van, ha létezik közös pont, különben nincs megoldása.

Közös pont létezéséhez nyilvánvalóan szükséges a következő két föltétel teljesülése, és egyben elegendő is: $AS+BS > AB$ azaz $\frac{2g}{3} - c > 0$; a kör átmérője essék $e$-nek kis– és nagytengelye közé:

$$\sqrt{\frac{4g^2}{9} - c^2} \leq \frac{2s_c}{3} < \frac{2g}{3},$$

az átmérő a kistengellyel egyenlő is lehet – ekkor egyenlő szárú háromszöget ad a közös $S$ pont –, de a nagytengellyel nem, mert úgy a közös pont az $AB$ egyenesre esnék.

Ez az elvi megoldás azonban nem követhető eukleidészi szerkesztéssel, mert $e$-ből csak véges számú pontot tűzhetünk ki. Emiatt számítással készítjük elő a szerkesztést.

Egyszerűsitésül előbb az $x^2 + y^2 = r^2$ egyenletű körrel és az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ egyenletű ellipszissel foglalkozunk. Közös pontjuk koordinátái abszolút értékben:

$$x = a\sqrt{\frac{r^2 - b^2}{a^2 - b^2}}, \quad y = b\sqrt{\frac{a^2 - r^2}{a^2 - b^2}}.$$

(Az ordinátát csak avégett írtuk fel, hogy $y \neq 0$ esetére lássuk a fentire vezető $b \leq r < a$ föltételt.)

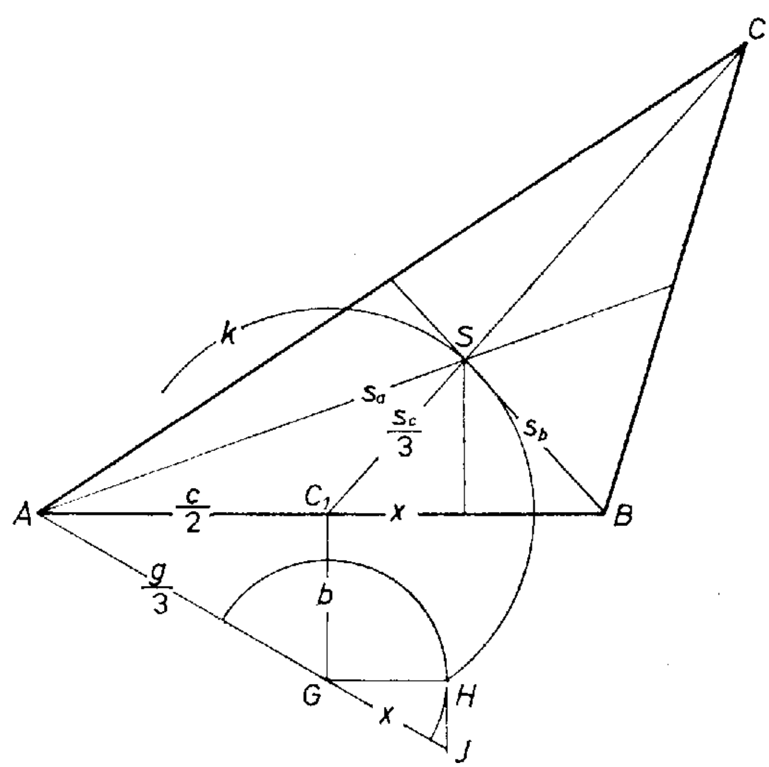
Esetünkben

$$a = \frac{g}{3}, \quad b^2 = \left(\frac{g}{3}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2, \quad a^2 - b^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2, \quad r^2 = \frac{s_c^2}{9},$$

és így

$$x\sqrt{r^2 - b^2} = \frac{g}{3} : \frac{c}{2},$$

ezek alapján szerkesztésünk a következő:



Az $AB=c$ szakasz felező merőlegesét metsszük az $A$ körüli, $\dfrac{g}{3}$ sugarú körrel a $G$ pontban, így $C_1G=b$; a $G$-n átmenő, $AB$-vel párhuzamos egyenesből a $k$ körrel kimetsszük azt a $H$ pontot, amelyre $HB<HA$, így $GH=\sqrt{r^2-b^2}$; az $AG$ egyenest metsszük a $H$-n átmenő, $AB$-re merőleges egyenessel $J$-ben, ekkor a párhuzamos szelők tétele alapján $GJ=x$. Ezután $x$-et felmérjük a $C_1B$ szakaszra, a végpontjában $AB$-re állított merőleges $k$-ből kimetszi $S$-et. Innen már láttuk a befejezést.

**II. megoldás.** Kiszámítjuk az $SA=\dfrac{2}{3}s_a$ szakaszt (és vele tulajdonképpen $SB=\dfrac{2}{3}s_b$-t is, mondhatjuk így is: a fönti ellipszisben az $S$ pont vezérsugarait) a súlyvonalaknak a háromszög $a$, $b$, $c$ oldalaival való ismert összefüggései [1] alapján. Látni fogjuk, hogy a nagyobbik vezérsugár egyenlő a föntiek szerint már rendelkezésünkre álló $AG$ és $GH$ szakaszok összegével (a kisebbik pedig ezek különbsége). Ekkor $S$-et a fönti $k$ körből az $A$ körüli $SA$ sugarú körrel metszhetjük ki. $s_a$ és $s_b$ a következő másodfokú egyenlet gyökei:

$$u^2-(s_a+s_b)u+s_as_b=u^2-gu+s_as_b=0.$$
$$2u_{12}=g\pm\sqrt{g^2-4s_as_b}.$$

Ezekhez

$$s_a^2=\frac{1}{4}(2b^2+2c^2-a^2),\quad s_b^2=\frac{1}{4}(2a^2+2c^2-b^2),\quad s_c^2=\frac{1}{4}(2a^2+2b^2-c^2);$$

tehát

$$2s_as_b=(s_a+s_b)^2-(s_a^2+s_b^2)=g^2-\frac{1}{4}(4c^2+a^2+b^2)=g^2-c^2-\frac{1}{4}\cdot\frac{4s_c^2+c^2}{2},$$
$$g^2-4s_as_b=-g^2+\frac{9}{4}c^2+s_c^2=9\left\{\left(\frac{s_c}{3}\right)^2-\left[\left(\frac{g}{3}\right)^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2\right]\right\},$$

így a két vezérsugár nagyobbika valóban

$$\frac{2}{3}s_a=\frac{g}{3}+\sqrt{\left(\frac{s_c}{3}\right)^2-\left[\left(\frac{g}{3}\right)^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2\right]}=$$
$$=AG+\sqrt{C_1H^2-(AG^2-AC_1^2)}=AG+\sqrt{C_1H^2-C_1G^2}=AG+GH,$$

amint állítottuk.

[1] Ha $C$ tükörképe $C_1$-re $C^*$, akkor a $CAC^*B$ paralelogrammában az átlók négyzetösszege egyenlő az oldalak négyzetösszegével.