

Jelöljük a beírt, körülírt kör középpontját O -val, K -val, BC felezőpontját A_1 -gyel, O -nak BC -n levő vetületét A_2 -vel, AO -nak BC -vel és a körülírt körrel alkotott metszéspontját A_3 -mal, D -vel, D átellenes pontját E -vel. Ismeretes, hogy

$$BD = OD = CD,$$

hiszen például a BOD szög is és az OBD szög is egyenlő az ABC háromszög A -beli és B -beli szögei összegének a felével. Feltehetjük, hogy $AB < AC$, ekkor A_3 az A_1B , A_2 az A_3B szakaszon van. Pitagorasz tétele alapján

$$OD^2 = A_1A_2^2 + (OA_2 + A_1D)^2,$$

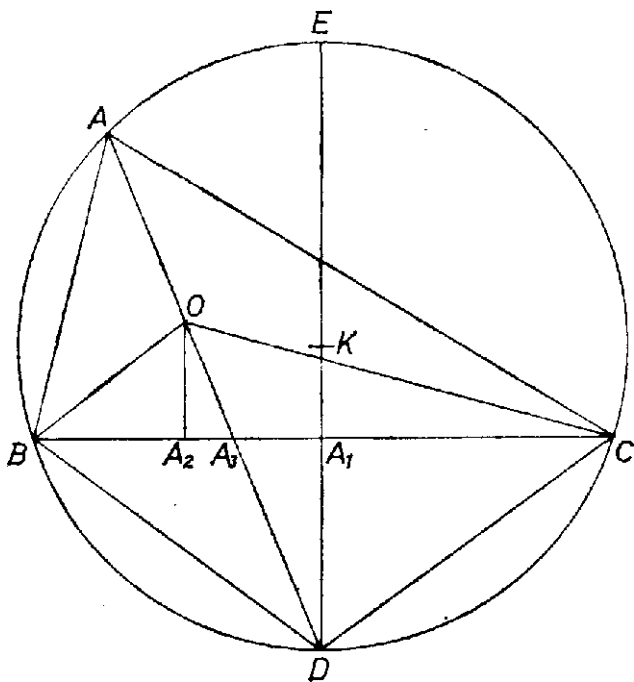
így $OD = BD$ felhasználásával kapjuk, hogy

$$A_1A_2^2 = BD^2 - A_1D^2 - 2A_1D \cdot OA_2 - OA_2^2 = \frac{a^2}{4} - 2rd - r^2$$

ahol $d = A_1D$ a

$$(1) \quad 4d(2R - d) = a^2,$$

egyenlet megoldása, ami viszont a húrszeletekre vonatkozó $A_1D \cdot A_1E = A_1B \cdot A_1C$ összefüggésből következik.



Ismeretes, hogy $BA_2 = \frac{1}{2}(a - b + c)$, ahol b, c az AC, AB szakaszok hosszát jelöli, emiatt $A_1A_2 = \frac{1}{2}(b - c)$. Vezessük be az

$$(2) \quad e^2 = a^2 - 4r(2d + r)$$

jelölést, ezzel a fenti eredményünk így írható:

$$(3) \quad b - c = e.$$

Jelöljük még $2A_1A_3$ -at x -szel, akkor $b : c = A_3C : A_3B$ miatt

$$b : c = (a + x) : (a - x)$$

vagyis

$$(b - c) : x = (b + c) : a.$$

Az aránypár első tagja az A_3A_2O, A_3A_1D háromszögek hasonlósága alapján meghatározható:

$$A_1A_3 : A_3A_2 = d : r,$$

tehát

$$x : (b - c) = d : (r + d).$$

Ezek szerint

$$b + c = \frac{a(r + d)}{d},$$

ahonnan (3) alapján kapjuk, hogy

$$(4) \quad b = \frac{1}{2} \left(\frac{ar}{d} + a + e \right), \quad c = \frac{1}{2} \left(\frac{ar}{d} + a - e \right)$$

A keresett háromszög oldalait tehát (4) határozza meg a $b > c$ feltétel mellett; ha ezt a feltételt elhagyjuk, b , c szerepe természetesen felcserélhető. A (4)-ben szereplő d az (1) egyenlet gyöke. Ebből e -t (2) alapján kapjuk, feltéve, hogy (2) jobb oldalán pozitív szám áll. A lehetséges megoldások száma tehát 0 és 4 között tetszőleges szám lehet.

A mondott numerikus esetben (1) a

$$d^2 - 130d + 39^2 = 0$$

egyenletet jelenti, ahonnan $d_1 = 13$, $d_2 = 117$. Ennek megfelelően (2) alapján

$$e_1^2 = 78^2 - 4 \cdot 28 \cdot 54 = 36,$$

és e_2^2 -re negatív érték adódik. Végül (4)-ből kapjuk, hogy

$$b_1 = 126, \quad c_1 = 120.$$

Megjegyzés. A kitűzésben a értéke sajtóhiba miatt 79-nek volt megadva (az orosz és angol fordításban a helyes szöveg szerepelt). Ebből a $b_1 = 127,4$, és $c_1 = 117,0$ értékeket kapjuk (e_2^2 itt is negatív).