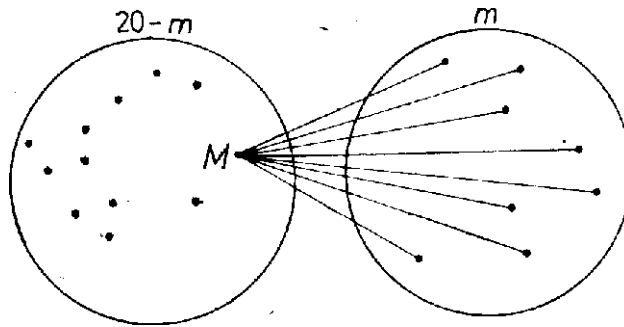


Tegyük fel, hogy a társaságban M fogott a legtöbbszőr kezét (vagy legalábbis a legtöbbszőr kezét fogók egyike), és jelöljük M kézfogásainak a számát m -mel. Az az m ember, akikkel M kezét fogott, csak a többi $(20 - m)$ emberrel (köztük M -mel) foghatott kezét, hiszen ha közülük bármely kettő egymással kezét fogta, M -et hozzájuk véve három olyan embert kapnánk, akiknek a létezését a feladat kizárja.



Számoljuk most össze a kézfogásokat úgy, hogy mindegyiket mindkét érintett személynél számításba vesszük. Azoknál, akikkel M kezét fogott, összesen legfeljebb $m(20 - m)$ kézfogást kaphatunk: m embernél fejenként legfeljebb $(20 - m)$ kézfogást. A többieknél (köztük M -nél is) legfeljebb m kézfogást számíthatunk, és mivel ők $(20 - m)$ -en vannak, összesen ismét legfeljebb $m(20 - m)$ -et kapunk. Ez összesen $2m(20 - m)$, de így minden kézfogást kétszer számoltunk, a kézfogások száma tehát legfeljebb $m(20 - m)$ lehet. Ez akkor maximális, ha $m = 10$, tehát a társaságban legfeljebb 100 kézfogásra kerülhetett sor. Pontosan ennyi kézfogás volt, ha például 10 nő és 10 férfi volt a társaságban, és minden nő minden férfival kezét fogott. Ekkor bárhogyan veszünk ki hármat a társaságból, van közöttük két egymemű, akik nem fogtak kezét.

Megjegyzések. 1. Feladatunkban (és megoldásában) a 20-nak nincs különösebb szerepe, általában n tagú társaságban $k(n - k)$ kézfogásra kerülhet sor, ahol $k = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Ez a tétel *Turán Páltól* származik, és a gráfelmélet egyik első eredménye.

Tehetünk a feladatban. három helyett is tetszőleges más számot, így azonban sokkal nehezebb kérdést kapunk.

2. A feladatra igen sok hibás megoldás érkezett. Ezekben ugyan a végeredmény többnyire helyes, mégsem fogadhattuk el őket, hiszen csak azt mutatták meg, hogy van olyan társaság, ahol 100 kézfogásra került sor, és ebből a feladat kérdésére vonatkozóan még semmilyen következtetést nem vonhatunk le.