

Első észrevételünk az, hogy ha $z \geq 1$, akkor $z - 1/z \geq 0$, és ezért

$$(1) \quad f\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{z + \frac{1}{z} + \left|z - \frac{1}{z}\right|}{2} = z.$$

Másodszor $i \geq 2$ miatt található olyan $\alpha \geq 1$ szám, amelyre $i = \alpha + 1/\alpha$, és akkor (1) szerint $f(i) = \alpha$. Olyan j_n -et kell találnunk, amelyre $f(j_n) = \alpha^n$. Ismét (1) alapján $\alpha^n \geq 1$ miatt a

$$(2) \quad j_n = \alpha^n + \frac{1}{\alpha^n}$$

választás megfelelő lesz, ha sikerül megmutatnunk, hogy $j_n \geq 2$, valamint j_n egész.

Az, hogy $j_n \geq 2$, abból következik, hogy j_n egy pozitív számnak és reciprokanak összege; a másik állítást teljes indukcióval bizonyítjuk. Tudjuk, hogy $n = 0$ -ra $j_0 = 2$ egész, $n = 1$ -re $j_1 = i$ a feladat feltételei szerint egész. Ha most j_{n-1} és j_n is egész, akkor

$$j_{n+1} = \alpha^{n+1} + \frac{1}{\alpha^{n+1}} = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) \left(\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n}\right) - \left(\alpha^{n-1} + \frac{1}{\alpha^{n-1}}\right) = i \cdot j_n - j_{n-1}$$

szintén egész.

Ezzel a feladat állítását beláttuk.