

**I. megoldás.** Haladjunk sorban 1-től kezdve a számegyenesen, és a természetes számokat tegyük be abba a halmazba, amelyikbe tudjuk úgy, hogy a feladat állítása továbbra is teljesüljön. Egy számot csak egy halmazba tegyünk (ha mindkettőbe tehetnénk, akkor mindegy, melyikbe), és minden számot tegyünk valahová. Legyen a következő szám, amit el próbálunk helyezni,  $k$ . Ha  $k$ -t nem tudjuk  $A$ -ba tenni, akkor van olyan  $a \in A$ , amelyre  $k/a = r$ ; ( $a/k$  nem lehet egyenlő  $r$ -rel, hiszen  $a < k$  és  $r > 1$ ). Ha  $k$ -t nem tudjuk  $B$ -be sem betenni, akkor van  $b \in B$ , amelyre  $k/b = r$ . De ekkor  $a = k/r = b$ ; ellentmondásra jutottunk, mivel a két halmaznak nincs közös eleme. Ez azt jelenti, hogy  $k$ -t legalább az egyik halmazba be tudjuk tenni.

Ezzel a természetes számokat a feladat feltétele szerinti két részre felosztottuk.

*Marosi István* (Eger, Gárdonyi G. Gimn., III. o. t.)

**II. megoldás.** Mivel  $r$  racionális szám, felírható két egész szám hányadosaként. Legyen  $r = \frac{p}{q}$ , ahol  $p > q \geq 1$  relatív prím számok, vagyis  $\frac{p}{q}$  az  $r$ -nek tovább nem egyszerűsíthető alakja.

Bármely természetes szám egyértelműen felírható  $sp^kq^m$  alakban, ahol  $s$  sem  $p$ -vel, sem  $q$ -val nem osztható természetes szám,  $k$  és  $m$  nem negatív egész számok. ( $q = 1$  esetén  $q$ -t nem szerepeltetjük.)

Tegyük az  $A$ -ba azokat a természetes számokat, amelyeknek fenti alakjában  $p$  kitevője páros szám, a  $B$ -be pedig azokat, amelyeknél  $p$  kitevője páratlan. Ha  $r = N/n$ , ahol  $N = Sp^Kq^M$  és  $n = sp^kq^m$ , akkor  $S = s$  és  $K = k + 1$ ,  $M = m - 1$ , tehát  $k$  és  $K$  közül az egyik páros, a másik páratlan, így  $n$  és  $N$  különböző halmazokba kerültek.