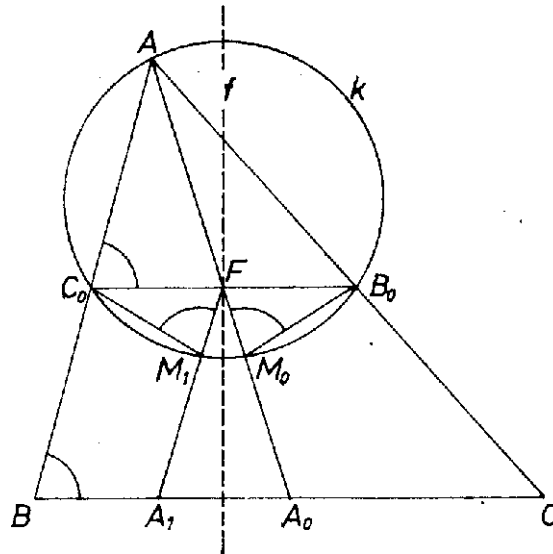


Jelöljük a BC , B_0C_0 szakaszok felezőpontját A_0 -lal, F -fel, az utóbbi felező merőlegesét f -fel, az AB_0C_0 háromszög köré írt kört k -val. Az AF egyenes k -t másodszor F -en túli darabján metszi, ezt a metszéspontot jelöljük M_0 -lal, M_0 -nak f -re vonatkozó tükrképét (ami szintén k -n van) M_1 -gyel. Az AA_0A_1 háromszögben A_1 -nél derékszög van, F az AA_0 átfogó felezőpontja, f tehát az A_0A_1 szakasznak is felező merőlegese, így M_1 rajta van az A_1F egyenesen. Megmutatjuk, hogy M_1 az A_1B_0C háromszög köré írt körön is, az A_1C_0B háromszög köré írt körön is rajta van, ezzel feladatunknak mindkét állítását belátjuk.

Mivel B és C szerepe eddig még szimmetrikus volt, elég belátnunk például, hogy a B , A_1 , C_0 , M_1 pontok egy körön vannak. A k körben az M_0 , C_0 pontok az AB_0 húrnak ugyanazon az oldalán vannak, ezért belőlük ez a húr egyenlő szögek alatt látszik:

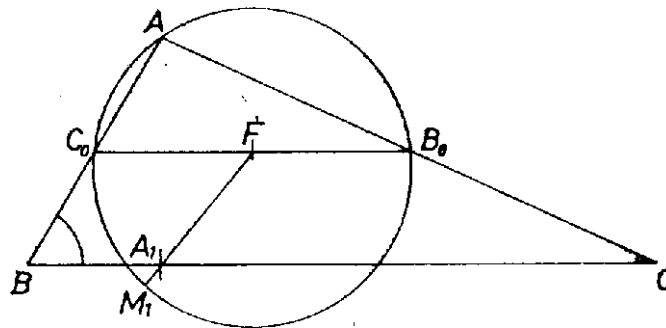
$$AC_0B_0 \sphericalangle = AM_0B_0 \sphericalangle.$$

Itt az első egyenlő az ABC szöggel, a második a C_0M_1F szöggel.



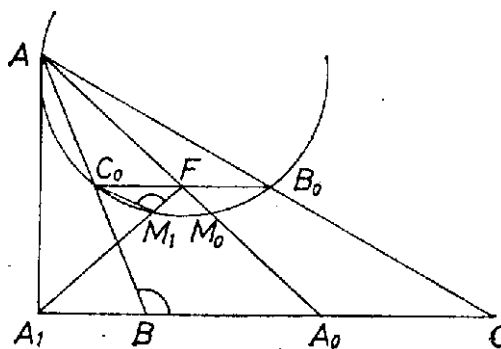
1. ábra

Ha tehát ABC hegyesszögű háromszög (1. ábra), készen is vagyunk, hiszen ekkor A_1 a BC , M_1 pedig az A_1F szakaszon van, és C_0M_1F épp a konvex $BA_1M_1C_0$ négyszög B -vel szemközi csúcsánál levő külső szöge.



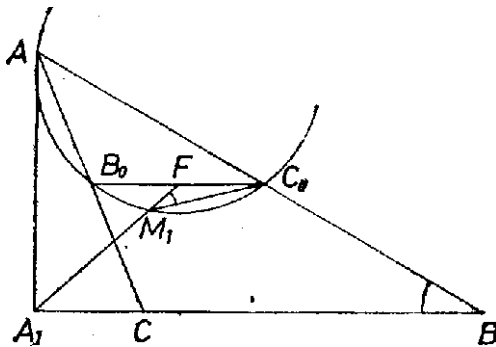
2. ábra

Ha az ABC háromszögben A -nál 90° -os, vagy annál nagyobb szög van (2. ábra), M_1 azonos A_1 -gyel, vagy A_1F -nek A_1 -en túli meghosszabbításán van, és A_1 továbbra is a BC szakaszon van. Ekkor tehát B és M_1 az A_1C_0 egyenesnek ugyanazon az oldalán vannak, és belőlük az A_1C_0 szakasz egyenlő szögek alatt látszik.



3. ábra

Ugyanez igaz, ha a B -nél levő szög nagyobb 90° -nál (3. ábra), csak most azért, mert ezek a szögek az ABC , C_0M_1F szögek mellékszögei. (Ha $ABC < 90^\circ$, A_1 azonos B -vel, állításunk nyilvánvaló.)



4. ábra

Végül, ha $ACB < \geq 90^\circ$, a $BA_1M_1C_0$ négyszög pontosan azért húrnégyszög, mint az első esetben (4. ábra).

Megjegyzés. Elkerülhettük volna a négy eset külön vizsgálatát a forgásszögek felhasználásával. Azért választottuk most mégis az esetek szétválasztását, hogy megmutassuk, bizonyításunk alapgondolata olyan egyszerű, hogy még az összes eset sorravétele sem nagy munka mellette.