Bizonyítsuk be első lépésként a következő állítást: Ha $2^k\alpha \neq m\pi$ ($k = 0, 1, \ldots, n$; m egész szám), akkor:

$$\frac{1}{\sin 2\alpha} + \frac{1}{\sin 4\alpha} + \ldots + \frac{1}{\sin 2^n\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha} \cdot \frac{\sin(2^n - 1)\alpha}{\sin 2^n\alpha}. \tag{2}$$

A bizonyítás módszere teljes indukció. $n = 1$ esetben az állítás triviális. Tegyük fel, hogy n-re teljesül az állításunk, megmutatjuk, hogy $(n+1)$-re is igaz.

Az utolsó n tagra és α helyébe 2α-t írva alkalmazzuk az indukciós feltevésünket, és a $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$ azonosságokat:

$$\frac{1}{\sin 2\alpha} + \left(\frac{1}{\sin 2(2\alpha)} + \ldots + \frac{1}{\sin 2^n(2\alpha)}\right) = \frac{1}{\sin 2\alpha} + \frac{1}{\sin 2\alpha} \cdot \frac{\sin(2^n - 1)\cdot 2\alpha}{\sin 2^n \cdot 2\alpha} =$$
$$= \frac{1}{\sin 2\alpha} \cdot \frac{\sin 2^n \cdot 2\alpha + \sin(2^n - 1)\cdot 2\alpha}{\sin 2^{n+1}\alpha} = \frac{1}{2\sin\alpha\,\cos\alpha} \cdot \frac{2\sin(2^{n+1} - 1)\alpha \cdot \cos\alpha}{\sin 2^{n+1}\alpha} =$$
$$= \frac{1}{\sin\alpha} \cdot \frac{\sin(2^{n+1} - 1)\alpha}{\sin 2^{n+1}\alpha}.$$

Ezzel az állítást igazoltuk.

Ha $\alpha = \frac{\pi}{2^{n+1} - 1}$, akkor $\sin(2^n - 1)\alpha = \sin 2^n\alpha$, mivel az argumentumok összege π. Az állítás feltételei teljesülnek, hiszen $0 \leq k \leq n$ esetén $0 < 2^k\alpha = \frac{2^k \cdot \pi}{2^{n+1} - 1} < \pi$ így (2) épp a bizonyítandó egyenlőséget adja.

Knébel István (Budapest, József Attila. Gimn., IV. o. t.)