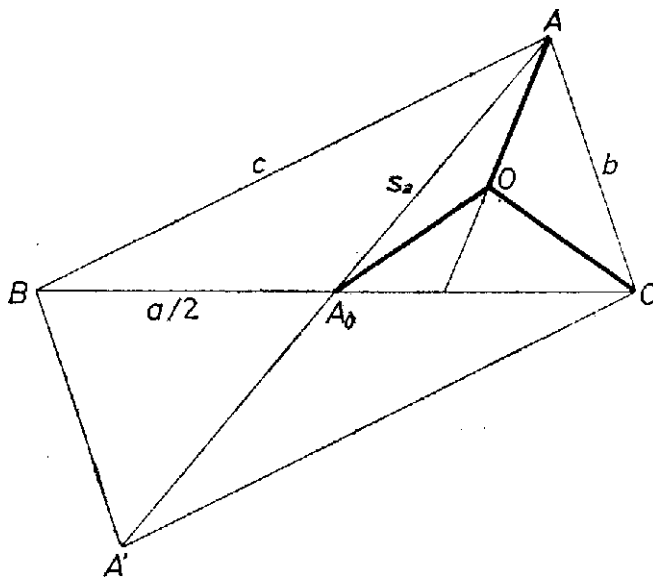


A kérdés eldöntéséhez szükséges három egyező menetű számítást általában készítjük elő. Legyen az ABC háromszögben a szokásos jelölések mellett $c > b$, és számítsuk ki az O középpontnak az $AA_0 = s_a$ súlyvonaltól mért d_a távolságát.



Így az A -beli szögfelező az A_0C szakaszon lép ki, tehát O az ACA_0 háromszögben van, első két oldalától $\varrho = \frac{2t}{a+b+c}$ távolságra. Felírjuk az ACA_0 háromszög $\frac{t}{2}$ területét az OA , OC , OA_0 szakaszokkal való felbontás alapján:

$$\left(b + \frac{a}{2}\right) \frac{\varrho}{2} + \frac{s_a d_a}{2} = \frac{t}{2} = (a+b+c) \frac{\varrho}{4},$$

amiből

$$d_a = \varrho \cdot \frac{c-b}{2s_a}.$$

Ugyanígy, ha még $a < b$, akkor O -nak az s_b , s_c súlyvonaltól vett távolsága

$$d_b = \varrho \cdot \frac{c-a}{2s_b}, \quad d_c = \varrho \cdot \frac{b-a}{2s_c}.$$

A súlyvonal hosszára, az A_0 -ra való tükrözés útján kapott $ABA'C$ paralelogrammából

$$4s_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 3a^2,$$

a másik két súlyvonal esetében pedig levonandónak $3b^2$ -et, $3c^2$ -et veszünk.

A számpéldában legyen sorra $a = 4$, $b = 5$, $c = 8$, így $4s_a^2 = 162$, $4s_b^2 = 135$, $4s_c^2 = 18$. A d_a , d_b , d_c távolságok helyett könnyebb a négyzeteiket összehasonlítani, másrészt célszerű a közös ϱ^2 tényezőt elhagyni, hiszen így a nagyságviszonyok változatlanok maradnak:

$$\left(\frac{d_a}{\varrho}\right)^2 = \frac{(c-b)^2}{4s_a^2} = \frac{9}{162} = \frac{1}{18}, \quad \left(\frac{d_b}{\varrho}\right)^2 = \frac{16}{135} = \frac{32}{15} \cdot \frac{1}{18}, \quad \left(\frac{d_c}{\varrho}\right)^2 = \frac{1}{18}.$$

Ezek szerint O az s_a és s_c súlyvonalaktól egyenlő távolságra és s_b -től távolabb van.

Megjegyzés. Meg lehet mutatni, hogy a $d_a = d_c$ egyenlőség föltétele: az oldalakra teljesüljön $4b^2 - 3(a+c)b + (a^2 + c^2) = 0$. Alkalmasan megválasztott a és c mellett az egyik b gyökkel $d_b > d_a$, a másikkal $d_b < d_a$. – Ha t egész szám, akkor az

$$a = (t-2)^2 + 7, \quad c = t^2 + 7, \quad b_1 = (t-1)^2 + 4, \\ b_2 = \frac{(t-1)^2}{2} + 8$$

képlethármasok egész oldalmérőszámokkal adnak ilyen háromszögeket (kivéve esetleg b_2 -t).