

Emeljük hatodik hatványra (1) két oldalát:

$$(2) \quad 2(x^3 + y^3)^2 \geq (x^2 + y^2)^3$$

Ha (1) teljesül, (2) is igaz, hiszen (1) jobb oldalán nem negatív szám áll. Megfordítva ez ugyan nem feltétlenül igaz, ezt a kérdést azonban célszerűbb akkor megvizsgálni, ha már tudjuk, milyen számokra teljesül (2).

A műveleteket elvégezve (2)-ből az

$$x^6 - 3x^4y^2 + 4x^3y^3 - 3x^2y^4 + y^6 \geq 0$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Mivel itt $x = y$ mellett a bal oldal értéke 0, az osztható $(x - y)$ -nal:

$$(x - y)(x^5 + x^4y - 2x^3y^2 + 2x^2y^3 - xy^4 - y^5) \geq 0.$$

Még mindig kiemelhetünk $(x - y)$ -t:

$$(x - y)^2(x^4 + 2x^3y + 2xy^2 + y^4) \geq 0.$$

Megkönnyíti a második tényező szorzattá alakítását, ha azt $(x^2 + y^2)^2 + 2xy(x^2 + y^2) - 2x^2y^2$ alakban írjuk fel. Ha ugyanis z_1, z_2 a

$$z^2 + 2z - 2 = 0$$

egyenlet gyökei, akkor tetszőleges A, B mellett

$$(A + z_1B)(A + z_2B) = A^2 + 2AB - 2B^2.$$

Emiatt

$$x^4 + 2x^3y + 2xy^2 + y^4 = [x^2 + y^2 - (\sqrt{3} - 1)xy][x^2 + y^2 + (\sqrt{3} + 1)xy].$$

Mivel

$$x^2 + y^2 - (\sqrt{3} - 1)xy = (x + y)^2 - (\sqrt{3} + 1)xy = (x - y)^2 + (3 - \sqrt{3})xy,$$

itt az első tényező mindig nem negatív (akármilyen is xy előjele), így elég a második tényezőt szorzattá alakítani. A

$$z^2 + (\sqrt{3} + 1)z + 1 = 0$$

egyenlet gyöktényezősz alakja alapján végül is a teljes szorzattá alakítás eredménye:

$$(x - y)^2[x^2 + y^2 - (\sqrt{3} - 1)xy] \left(y + \frac{\sqrt{3} + 1 + \sqrt{2\sqrt{3}}}{2}x \right) \left(x + \frac{\sqrt{3} + 1 + \sqrt{2\sqrt{3}}}{2}y \right) \geq 0.$$

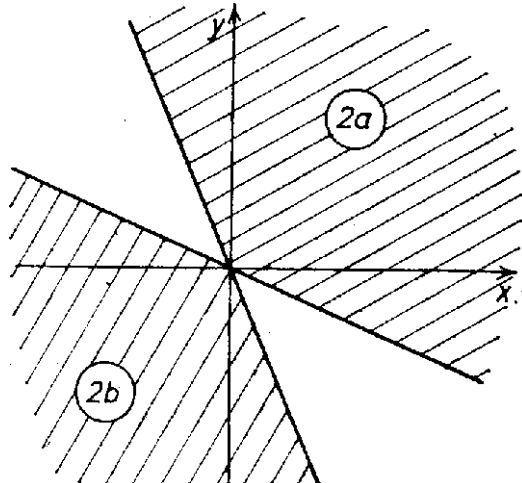
Az utolsó két tényező az x, y koordináta-rendszer egy-egy egyenesén egyenlő 0-val, és a szorzat akkor pozitív, ha az x, y pont vagy mindkét egyenes felett van, vagy mindkét egyenes alatt. Itt a másik két tényező is nem negatív, és ahol azok 0-val egyenlők ($x = y$, illetve $x = y = 0$), az utolsó szorzat ott is nem negatív, (2) összes megoldása tehát vagy a

$$(2a) \quad 2y + \left(\sqrt{3} + 1 + \sqrt{2\sqrt{3}} \right)x \geq 0, \quad 2x + \left(\sqrt{3} + 1 + \sqrt{2\sqrt{3}} \right)y \geq 0$$

feltételeknek, vagy a

$$(2b) \quad 2y + \left(\sqrt{3} + 1 + \sqrt{2\sqrt{3}} \right)x \leq 0, \quad 2x + \left(\sqrt{3} + 1 - \sqrt{2\sqrt{3}} \right)y \leq 0$$

feltételeknek tesz eleget. A két egyenlőtlenséget mindkét esetben összeadva azt kapjuk, hogy $x + y$ értéke (2a) esetén nem negatív, (2b) esetén nem pozitív.



Mivel

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2),$$

és itt a második tényező csak $x = y = 0$ mellett 0, különben pozitív, $x + y$ előjele megegyezik $x^3 + y^3$ előjelével. A (2a) esetben tehát $x^3 + y^3$ nem negatív, ekkor (2) maga után vonja (1) teljesülését. A (2b) esetben $x^3 + y^3$ nem pozitív, így (1) eleve nem teljesülhet (az $x = y = 0$ esetet kivéve, ami azonban (2a)-ban is benne van). (1) tehát akkor és csakis akkor teljesül, ha az x, y számpárra teljesül (2a).