

Célszerűnek látszik az $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ szorzatot összeggé alakítani, mivel így remélhetjük, hogy bizonyos tagok összege 0 lesz és a_n egyszerűbben is kifejezhető. Próbáljuk meg az $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ -t $\frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2}$ alakban felírni:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2} = \frac{n^2(A+B+C) + n(3A+2B+C) + 2A}{n(n+1)(n+2)}.$$

Ha ez minden n -re teljesül, akkor nyilván

$$\begin{aligned} A+B+C &= 0, \\ 3A+2B+C &= 0, \\ 2A &= 1. \end{aligned}$$

Ezt az egyenletrendszert megoldva kapjuk, hogy $A = \frac{1}{2}$; $B = -1$; $C = \frac{1}{2}$, tehát

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right).$$

(1)-ben minden tagot hasonlóképpen felbontva, $\frac{1}{k}$ ($k = 3, \dots, n$) háromszor szerepel: kétszer $\frac{1}{2}$ és egyszer -1 együtt-hatóval, ezek összege nyilván 0. Az $\frac{1}{1}$ és $\frac{1}{n+2}$ csak egyszer, az első, illetve az utolsó tag összeggé bontásában fordul elő, míg az $\frac{1}{2}$ és $\frac{1}{n+1}$ az első kettő, illetve az utolsó két tag felbontásában. Így

$$(2) \quad a_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n+1)(n+2)}.$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n(n+1)(n+2)} = 0$ miatt a sorozat konvergens és határértéke $\frac{1}{4}$.

Pethő Attila (Jászberény, Lehel Vezér Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. Az

$$(3) \quad \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)$$

felbontás hasonló eredményre vezet, sőt még némi általánosításra is lehetőséget ad.

Az $A_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \dots k} + \frac{1}{2 \cdot 3 \dots (k+1)} + \dots + \frac{1}{n(n+1) \dots (n+k-1)}$ sorozat határértékét keresve ugyanis (3) mintájára alkalmazhatjuk a könnyen igazolható

$$\begin{aligned} \frac{1}{n(n+1) \dots (n+k-1)} &= \frac{1}{k-1} \left(\frac{1}{n(n+1) \dots (n+k-2)} \right) - \\ &\quad - \left(\frac{1}{(n+1)(n+2) \dots (n+k-1)} \right). \end{aligned}$$

azonosságot. Ennek segítségével kapjuk, hogy

$$A_n = \frac{1}{k-1} \left(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{(n+1) \dots (n+k-1)} \right).$$

Végül $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \frac{1}{(k-1)(k-1)!}$,
tehát

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+k-1)!} = \frac{1}{(k-1)(k-1)!}.$$

Lenkei Péter (Budapest, József A. Gimn., IV. o. t.)