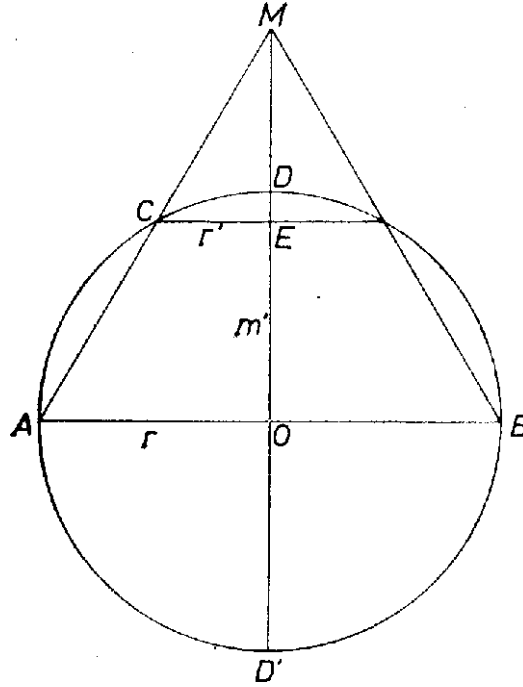


Legyen a kúp egy tengelymetszete az MAB egyenlő szárú háromszög, messe az $AB = 2r$ alap O felezőpontja körüli r sugarú kör az MA alkotót a C , az $MO = m$ tengelyt a D és D' pontokban, továbbá legyen C vetülete OM -re E .



A kúp és a félgömb közös részét a C -n átmenő, az alappal párhuzamos sík egy csonkakúpra és egy gömbszeletre vágja szét. Legyen a csonkakúp magassága $OE = m'$, kisebbik alapkörének sugara r' , ekkor a gömbszelet magassága $r - m'$.

Ezekkel a két rész V_{csk} , ill. V_{gsz} térfogatára ismert képletek:

$$V_{\text{csk}} = \frac{\pi}{3} m' (r^2 + rr' + r'^2),$$

$$V_{\text{gsz}} = \frac{\pi}{3} (r - m')^2 (2r + m').$$

Az m' , r' méreteket a kör M -ből húzott szelői, valamint hasonló háromszögek révén kifejezzük az m , r adatokkal:

$$MC \cdot MA = MD \cdot MD',$$

$$ME = \frac{MC}{MA} \cdot MO = \frac{MO \cdot MD \cdot MD'}{MA^2} = \frac{m(m-r)(m+r)}{m^2 + r^2} = \frac{m(m^2 - r^2)}{m^2 + r^2},$$

$$m' = m - ME = \frac{2mr^2}{m^2 + r^2},$$

$$CE = \frac{ME}{MO} \cdot AO = \frac{r(m^2 - r^2)}{m^2 + r^2} = r', \quad r'^2 + m'^2 = r^2.$$

Ezeket beírva, a két darab együttes térfogata

$$V = \frac{\pi}{3} [2r^3 + rm'r' - 2r^2m' + m'(r'^2 + m'^2)] =$$

$$= \frac{2\pi r^3}{3} \left[1 + \frac{mr(m^2 - r^2)}{(m^2 + r^2)^2} - \frac{mr}{m^2 + r^2} \right] = \frac{2\pi r^3}{3} \left[1 - \frac{2mr^3}{(m^2 + r^2)^2} \right].$$

Ezzel a feladatot megoldottuk.

Megjegyzés. Azt is látjuk az eredményből, hogy az ábra AC szeletének MO körüli forgatásával előálló gyűrű-test térfogata mint a félgömb és a vizsgált darab térfogatának különbsége

$$\frac{4\pi}{3} \cdot \frac{mr^6}{(m^2 + r^2)^2}.$$