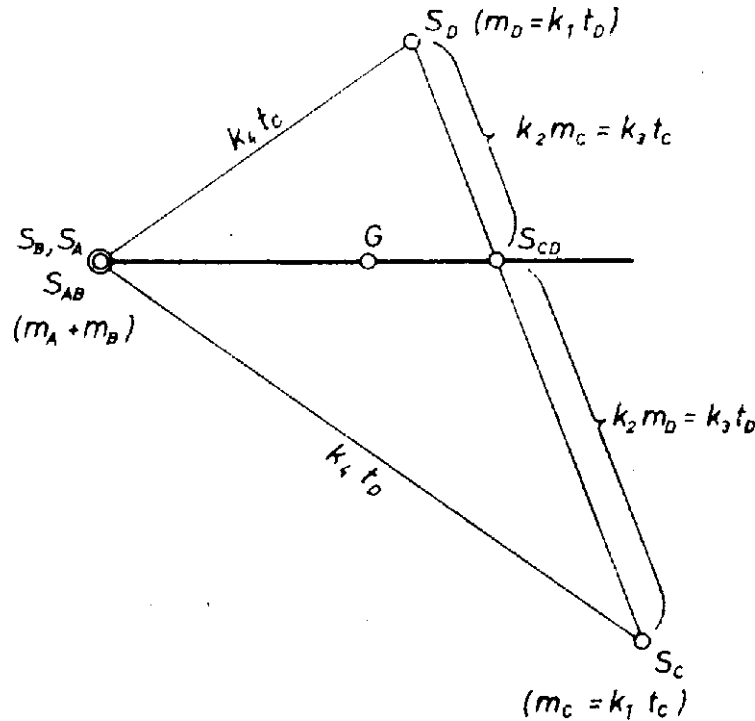


A homogén anyagú BCD háromszöglap geometriai értelemben vett S_A súlypontja egyúttal dinamikai értelemben a rá ható elemi súlyerők eredőjének támadópontja. Ennélfogva e lap $m_A = k_1 t_A$ tömegét S_A -ba sűrítve gondolhatjuk, itt t_A a lap területét, a k_1 arányossági tényező pedig az anyag „felületi sűrűségét” jelenti. Ezt folytatva, elég meghatározunk a négy S_X pontból álló, t_X tömeget tartalmazó pontrendszer súlypontját – ahol rendre $X = A, B, C, D$ –, hiszen k_1 -et további közlés hiányában nyilván csak mind a négy lapra vonatkozóan ugyanakkorának vehetjük.



Tovább 2 – 2 pontunk tömegét vonjuk össze. Az S_X - és S_Y -beli tömegekből álló pár ($Y \neq X$) közös súlypontja az $S_X S_Y$ szakasznak abban az S_{XY} pontjában van, amelyre (a nyomatékok egyezése alapján) $S_{XY} S_X : S_{XY} S_Y = m_Y : m_X = t_Y : t_X$, másképpen, alkalmas k_2 és k_3 arányossági tényezővel $S_{XY} S_X = k_2 m_Y - k_3 t_Y$. Ugyanezzel az elvvel kapjuk a kérdéses G súlypontot, egyik tömegpárban X -et és Y -t A -nak, B -nek választva, az $S_{AB} S_{CD}$ szakaszon.

Felhasználjuk továbbá, hogy mind a négy $S_X S_X$ szakasz átmegy az $ABCD$ tetraéder S súlypontján úgy, hogy $SX = 3 \cdot SS_X$, tehát az $S_A S_B S_C S_D$ tetraéder az előbbiből centrális hasonlósággal áll elő. (Az arányszám értéke $-1/3$, de ez nem lesz lényeges.) Ebből következik, hogy az új tetraéder bármelyik két lapja területének az aránya megegyezik a megfelelő eredeti lapok t -arányával, pl. (röviden, jelképesen):

$$(S_A S_B S_C) : (S_A S_B S_D) = (ABC) : (ABD) = t_D : t_C.$$

Vetítsük most az új tetraédert egy, az $S_A S_B$ élére merőleges síkra – más szóval: nézzünk rá végtelen távolságból, ebből az irányból –, és jelöljük a vetületeket – mint látszó képeket – ugyanúgy, mint magukat a pontokat. Csak az $S_A S_C S_D$ háromszöget látjuk, tekintsük ebben az S_A -ból induló két oldal arányát. Az $S_A S_C$ és $S_A S_D$ hosszakban az $S_A S_B S_C$, ill. $S_A S_B S_D$ háromszögnek azt a magasságát látjuk valódi nagyságban, amelyik merőleges a közös $S_A S_B$ oldalukra. Ennélfogva arányuk egyezik e két háromszög területének arányával, az pedig az előbbi példa szerint $t_D : t_C$, végül is $S_A S_C = k_4 t_D$, $S_A S_D = k_4 t_C$, ahol k_4 alkalmas arányossági tényező.

Most már az $S_{CD} S_C : S_{CD} S_D = S_A S_C : S_A S_D$ aránypárból következik, hogy S_{CD} rajta van a látszó háromszög S_A -ból induló szögfelezőjén, és hogy ezen a felezőn látjuk a keresett G -t is. Ámde egyenesek az ábra síkjára merőleges síkoknak a képei, tehát G rajta van az újabb tetraéder $S_A S_B S_C$ és $S_A S_B S_D$ lapjai közti lapszöveget felező síkon; így pedig G -nek e két lapsíktól mért távolsága egyenlő; célszerű jelöléssel $r_D = r_C$.

Alkalmazzuk eredményünket úgy, hogy az S_X pontok első párja A és C , majd pedig úgy, hogy B és C legyen, így $r_D = r_B$, majd $r_A = r_D$, tehát G az S_X tetraédernek mind a négy lapjától egyenlő távolságra van. Ezzel bebizonyítottuk a feladat állítását.

Megjegyzések. 1. A bebizonyított állítás a lapsúlypontok igénybevétele nélkül ezt is jelenti: ha a tetraéder mindegyik csúcsába a szemben levő lap területével arányos tömeget teszünk, a pontrendszer súlypontja megadja a tetraéderbe beírható gömb középpontját.

2. Mind a háromszögre, mind a gömbre vonatkozóan hasonló súlypont-értelmezést kapunk a háromszöghöz hozzáírt körök (külső érintő körök) középpontjára, ill. a hozzáírt gömbök középpontjára – amennyiben a háromszög valamelyik oldalának negatív súlyt tulajdonítunk (vonzóerő helyett ellentétes irányú, felfelé ható erőt). Tetraéder esetében összesen 8 érintő gömb lehetséges, mert egyszerre 2 lapnak is adhatunk negatív súlyt, de pl. szabályos tetraéder esetében csak 5 jön létre.

3. A bizonyítások természetesen vektorok felhasználásával is végezhetők.