

Határozzuk meg n néhány értékére az $n + \sqrt{n}$ -hez legközelebb eső k számot:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
k	2	3	5	6	7	8	10	11	12	13	14	15	17

Azt tapasztaljuk, hogy k értéke valóban a soron következő természetes szám, kivéve, ha az négyzetszám. Azt is megfigyelhetjük, hogy ha valamilyen a pozitív egészre

$$(1) \quad a^2 < k < (a+1)^2,$$

akkor

$$(2) \quad n = k - a.$$

Ezt fogjuk igazolni. Ehhez azt kell belátnunk, hogy ha k -ra teljesül (1), akkor a (2)-vel definiált n -re

$$k - 0,5 < n + \sqrt{n} < k + 0,5,$$

vagyis

$$a - 0,5 < \sqrt{n} < a + 0,5.$$

Mivel itt még $a - 0,5$ is pozitív, négyzetre emelhetünk:

$$a^2 - a + 0,25 < n < a^2 + a + 0,25.$$

Ide beírjuk n értékét, azt kapjuk, hogy

$$a^2 + 0,25 < k < (a+1)^2 - 0,75,$$

ami – egész kitevőkről lévén szó – ekvivalens (1)-gyel, állításunkat ezzel beláttuk.