

$$(1) \quad \frac{1}{a} \operatorname{tg} \alpha (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \gamma) + \frac{1}{b} \operatorname{tg} \beta (\operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \alpha) + \frac{1}{c} \operatorname{tg} \gamma (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) = 0.$$

A bizonyítandó azonosság csak akkor értelmezhető, ha α, β, γ egyike sem egyenlő 90° -kal. Jelöljük Q -nak az egyenesen levő vetületét R -rel, és lássuk el a PQR szög mértékét pozitív vagy negatív előjellel aszerint, hogy R a P -nek ugyanazon az oldalán van-e, mint az A, B, C pontok, vagy sem. Hasonlóan előjelezzük a PR szakasz hosszát is, ekkor továbbra is igaz lesz, hogy

$$PR = QR \operatorname{tg} \omega,$$

ahol ω az előjellel ellátott PQR szöget jelöli. Lássuk el pozitív vagy negatív előjellel az RA szakaszt és RQA szöget is aszerint, hogy PA -val, illetve PQA -val egyirányúak-e, akkor $RQA \triangleleft \alpha - \omega$, és $RA = PA - PR$, tehát

$$a = QR (\operatorname{tg} (\alpha - \omega) + \operatorname{tg} \omega) = QR \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \omega) \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \omega}.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$b = QR \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \omega) \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \omega}, \quad c = QR \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \omega) \operatorname{tg} \gamma}{1 + \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \omega}.$$

Ezeket (1)-be helyettesítve valóban azonosságot kapunk.

A 2046. feladatban $\alpha = 30^\circ, \beta = 80^\circ, \gamma = 115^\circ, a = 100$ m, $c - b = 200$ m volt, az $x = b - a$ ismeretlenre (1)-ből a

$$(2) \quad \frac{\operatorname{tg} 30^\circ}{100} (\operatorname{tg} 80^\circ - \operatorname{tg} 115^\circ) \frac{\operatorname{tg} 80^\circ}{100 + x} (\operatorname{tg} 115^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ) + \frac{\operatorname{tg} 115^\circ}{300 + x} (\operatorname{tg} 30^\circ - \operatorname{tg} 80^\circ) = 0$$

egyenletet kapjuk. Ez ekvivalens az eredeti megoldás egyenletével.