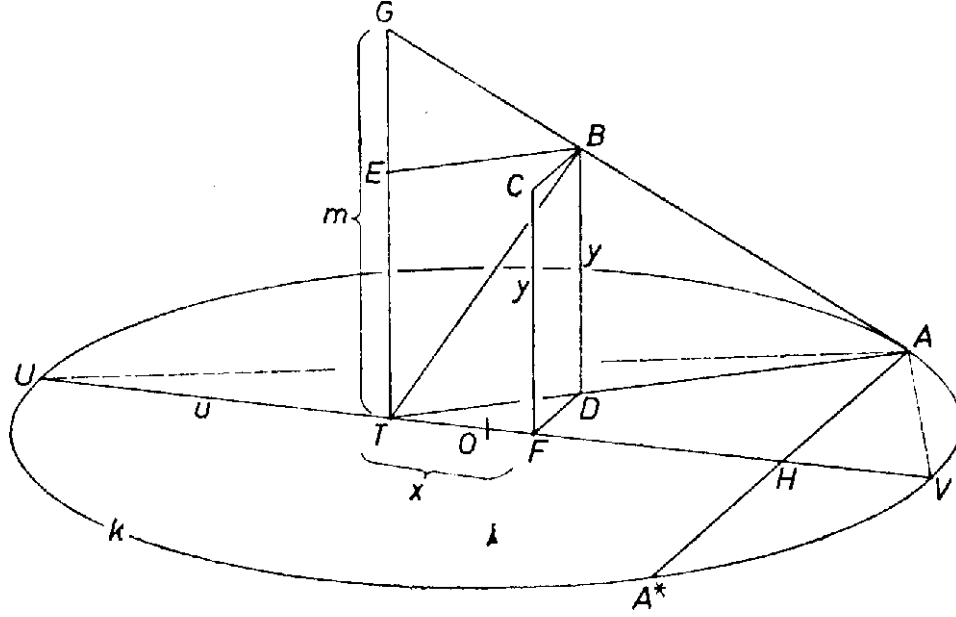


I. megoldás. Legyen a gúla alapidomának egy tetszőleges csúcsa az O középpontú, r sugarú k kör kerületén $A_i (i = 1, 2, \dots)$, a gúla magassága $GT = m$, és T vetülete GA_i -n B_i (1. ábra).



1. ábra

Minden ilyen vetület rajta van a GT átmérő fölötti Thalész-gömbön, így elég azt belátni, hogy a B pontok egy síkban vannak. Csak a nemtriviális esettel foglalkozunk, T nem azonos O -val. Ekkor a kérdéses sík nem párhuzamos az alappal, hiszen van olyan i, j indexpár, hogy $TA_i > TA_j$, így pedig B_i magasabban van, mint B_j . (Nyilván legalább 4 csúcsa legyen az alapidomnak.)

Nem változtat az állításon, ha minden A_i -nek TO -ra való A_i^* tükörképét is alapcsúcsnak vesszük. Így $B_i B_i^*$ merőleges a $GTO = S$ szimmetriasíkra, ezért a kérdéses sík is, elég tehát azt belátnunk, hogy a B_i vetületek S -en levő C_i vetületei egy egyenesen sorakoznak. Evégett megmutatjuk a TO, TG tengelyekkel meghatározott koordináta-rendszerben, hogy C koordinátái között elsőfokú kapcsolat áll fenn.

Legyen B vetülete TA -ra és TG -re D , ill. E , továbbá TO -n D és C közös vetülete F , és A vetülete H , végül legyenek TO -nak k -n levő pontjai U és V úgy, hogy $TU < TV$. Derékszögű háromszögek, hasonlóságok felhasználásával (a tengelyirányú szakaszokat előjellel együtt értve):

$$(1) \quad TF = x = \frac{TD}{TA} TH = \frac{EB}{TA} TH = \frac{EG}{TG} TH = \frac{m-y}{m} TH;$$

$$HA^2 = TA^2 - TH^2 = UH \cdot HV = (TH - TU)(TU + 2r - TH) =$$

$$= 2 \cdot TH(TU + r) - TH^2 - TU^2 - 2r \cdot TU,$$

és innen $TU = u$ jelöléssel

$$(2) \quad TH = \frac{TA^2 + u(2r + u)}{2(r + u)};$$

végül a BTD és az ABD háromszögnek AGT -hez való hasonlóságából

$$TD = \frac{my}{TA}, \quad \frac{y}{m} = \frac{TA - TD}{TA} = \frac{TA - \frac{my}{TA}}{TA} = \frac{TA^2 - my}{TA^2},$$

$$(3) \quad TA^2 = \frac{m^2 y}{m - y}.$$

Ezt (2)-be, majd (2)-t (1)-be helyettesítve kapjuk állításunkat:

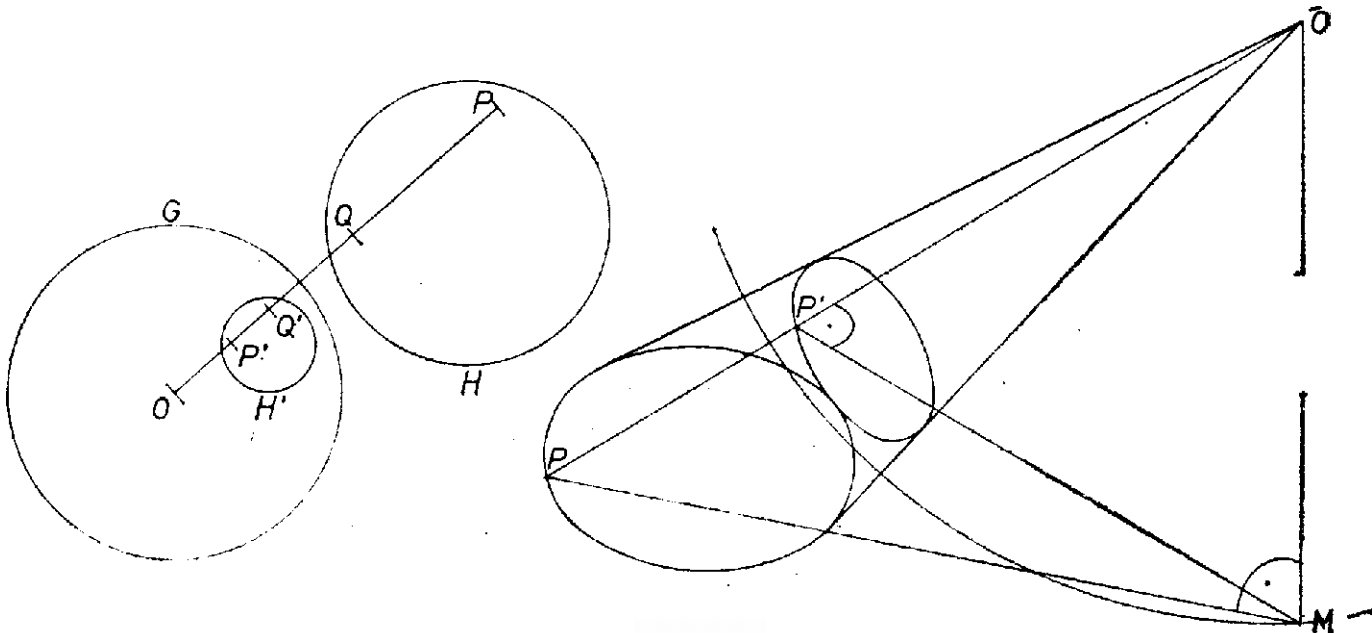
$$x = \frac{m-y}{m} \cdot \frac{\frac{m^2 y}{m-y} + u(2r+u)}{2(r+u)} = \frac{(m^2 - u^2 - 2ru)y + mu(2r+u)}{2m(r+u)}$$

(m, r, u állandók).

Megjegyzés. A k kör és a G pont egy (ferde) körkúpot határoz meg. Ebben a felfogásban azt kaptuk, hogy ferde kúpnak olyan körmetszete is van, amelynek síkja nem párhuzamos az alapsíkkal, és az ezzel párhuzamos síkok szintén kört metszenek ki a kúpból. Kúpunknak az UVG szög felezőjén át S -re merőlegesen álló sík is szimmetriasíkja.

II. megoldás. Felhasználjuk a gömbre vonatkozó inverzió fogalmát és egy tulajdonságát. Legyen adott egy O középpontú, r sugarú G gömb. G -re vonatkozó inverziónak nevezzük azt a transzformációt, amely a tér egy O -tól különböző P pontjához az OP félegyenesnek azt a P' pontját rendeli, amelyre $OP' \cdot OP = r^2$.

Megmutatjuk, hogy az inverzió egy, a középponton át nem menő H gömböt egy H' gömbbe visz át. Legyen H egy pontja P , legyen az OP egyenesnek és H -nak a másik metszéspontja Q , ha ez létezik, illetve legyen $Q = P$, ha OP érinti H -t. Legyen P' a P -nek G -re vonatkozó inverz képe (2. ábra).



2. ábra

Legyen q az O -nak H -ra vonatkozó hatványa, azaz $OP \cdot OQ = q$. Ekkor

$$\frac{OP'}{OQ} = \frac{OP' \cdot OP}{OQ \cdot OP} = \frac{r^2}{q}.$$

Tehát P' rajta lesz H -nak O középpontú, r^2/q arányú nagyítottján, vagyis H inverz képe a H' gömbön lesz, ahol H' a H -nak r^2/q arányú, O középpontú nagyítottja.

Könnyen belátható, hogy az inverzió H és H' pontjai között egy-egy értelmű megfeleltetést létesít. Ezt tudva megmutatjuk, hogy az inverzió egy, a középponton át nem menő k kört egy k' körbe visz át. Legyenek H_1 és H_2 az O -n át nem menő, k -ra illeszkedő, különböző gömbök; ezek G -re vonatkozó inverz képe H'_1 , illetve H'_2 gömbök, így k inverz képe a H'_1 és H'_2 metszete. Az inverzió kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesít k , valamint H'_1 és H'_2 közös része között, ezért a H'_1 és H'_2 gömbök közös része, a k' vonal egy kör. Tehát k inverz képe, k' , valóban kör.

Ezek után rátérünk a feladat állításának bizonyítására. Legyen O a gúla csúcsa, M a magasság talppontja, P az alapidom egyik csúcsa, P' az M -ből OP -re bocsátott merőleges talppontja. Az OMP derékszögű háromszögben $OP \cdot OP' = OM^2$, P' tehát P inverze az O középpontú, OM sugarú gömbre vonatkozólag (3. ábra). Láttuk, hogy az inverzió az alapidom köre írt kört körbe viszi, P' éppen ezen a körön lesz. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Csikós Balázs (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., III. o. t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. Az állítás lényegében azonos a *Maklári József*: Körérintési szerkesztések és alkalmazásaik c. középiskolai szakköri füzet (Tankönyvkiadó, Bp., 1970) 78. oldalán szereplő tétellel.