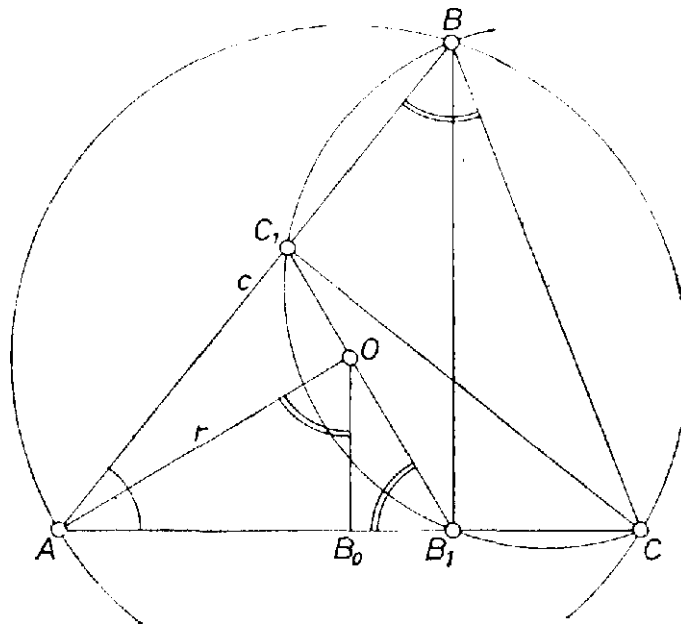


Az O középpont kívánt helyzete miatt a háromszög nem lehet sem tompaszögű, sem derékszögű. Továbbá a $BAC = \alpha$ csak kisebb lehet β és γ mindegyikénél, különben pl. az AB oldal felező merőlegesének nincs pontja a B_1C_1 szakaszon, tehát O sem lehet rajta. Ezek szerint $\alpha < \beta \leq \gamma$.



B_1 és C_1 a BC átmérőjű Thalész-körön vannak, ezért $OB_1A = C_1B_1A = C_1BC = \beta$.
 AC felezőpontját B_0 -al jelölve $AOB_0 = \beta$, és

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} OB_1A &= \operatorname{tg} \beta = \frac{OB_0}{AB_1 - AB_0} = \frac{r \cos \beta}{c \cos \alpha - \frac{b}{2}} = \frac{r \cos \beta}{2r \sin \gamma \cos \alpha - r \sin \beta}, \\ \frac{\sin \beta}{\cos \beta} &= \frac{\cos \beta}{2 \cos \alpha \sin \gamma - \sin \beta}, \\ 2 \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma &= \sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1, \end{aligned}$$

ez egy szög-feltétel a vizsgált háromszög-osztályra. Átrendezve, trigonometriai azonosságok ismételt alkalmazásával

$$\frac{1}{\cos \alpha} = 2 \sin \beta \sin \gamma = \cos(\gamma - \beta) - \cos(\beta + \gamma) = \cos(\gamma - \beta) + \cos \alpha,$$

$$(1) \quad \cos(\gamma - \beta) = \frac{1}{\cos \alpha} - \cos \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha.$$

Ennek alapján megválasztott α mellett kiszámítható β és γ , ennek diszkussziójából kapjuk a keresett korlátokat.

Mivel $\cos(\gamma - \beta) \leq 1$, azért

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos \alpha} - \cos \alpha &\leq 1, \\ 0 &\leq \cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1 = \left(\cos \alpha - \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right) \left(\cos \alpha + \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right), \end{aligned}$$

és mivel a második tényező mindig pozitív, azért

$$\begin{aligned} \cos \alpha &\geq \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \cos 51^\circ 49,6', \\ \alpha &\leq 51^\circ 49,6'. \end{aligned}$$

Rögzített α mellett γ és β említett számítása:

$$\begin{aligned} \gamma + \beta &= 108^\circ - \alpha, \\ \gamma - \beta &= \arccos \left(\frac{1}{\cos \alpha} - \cos \alpha \right), \text{ ezekből} \\ (2) \quad \gamma &= 90^\circ - \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{1}{\cos \alpha} - \cos \alpha \right), \\ \beta &= 90^\circ - \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{1}{\cos \alpha} - \cos \alpha \right), \end{aligned}$$

egyenlőség a fenti $\alpha = 51^\circ 49,6'$ mellett áll be: $\gamma = \beta = 64^\circ 5,4'$.

Mármost a $\gamma < 90^\circ$ korlátozás miatt (2)-ből

$$\arccos \left(\frac{1}{\cos \alpha} - \cos \alpha \right) < \alpha,$$

ebből a cosinusfüggvény szigorúan monoton csökkenése alapján

$$\frac{1}{\cos \alpha} - \cos \alpha > \cos \alpha,$$

egyrészt $\cos^2 \alpha < \frac{1}{2}$, másrészt $\cos(\gamma - \beta) > \cos \alpha$.

$$\alpha > 45^\circ \quad \gamma - \beta < \alpha.$$

Ha α csökkenve tart 45° -hoz, akkor $\gamma - \beta$ növekedve tart 45° -hoz, $\alpha = 45^\circ$ mellett $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 90^\circ$, és O a C_1 -ben adódik, már nem belső pontja a B_1C_1 szakasznak.

Mindezek szerint a korlátok

$$45^\circ < \alpha \leq 51^\circ 49,6' \quad \text{és} \\ 45^\circ < \beta \leq 64^\circ 5,4' \leq \gamma < 90^\circ.$$

Ezek mellett teljesül is a követelmény, mert számításaink megfordíthatóak.