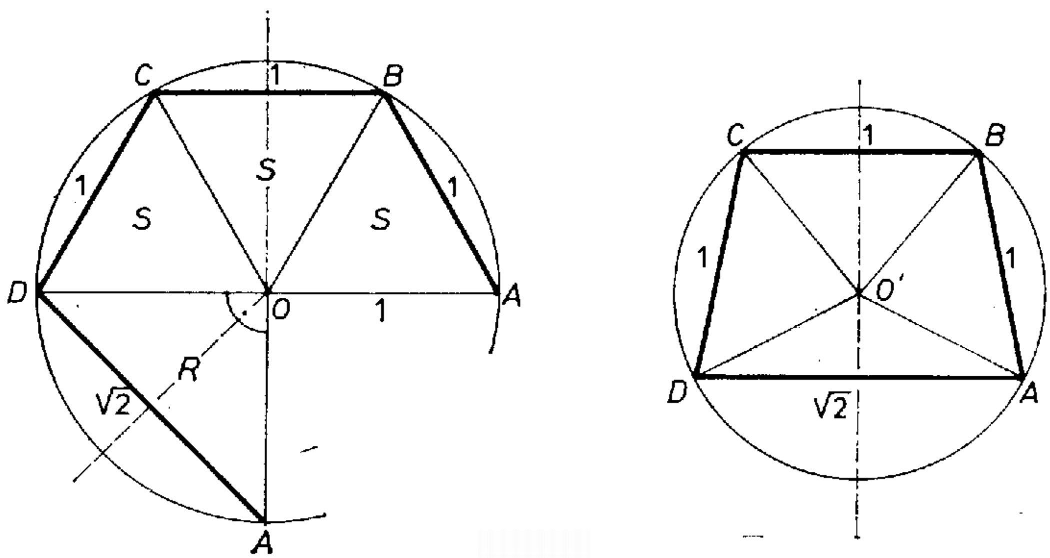
Csak konvex gúlákat vizsgálunk. Áttekintésünkben minden lehetséges módon összeállítunk 4 megengedett lapot a gúla palástkiterítése céljára, és minden talált esetet ellenőrizünk, ad-e valóban 4–oldalú gúlát. Ugyanis a kiterítés „felvágási” éleit összeragasztva a kapott 4–élű testszöglet nem merev ellentétben a 3-élű testszöglettel –, és kérdéses, mozgatható e úgy, hogy az „oldalélek” 4 végpontja egy síkba essék, illetve hogy ekkor valódi négyszög keletkezik-e. – A szabályos háromszöglapokat röviden S-sel, a derékszögű, egyenlő szárú háromszöglapokat R-rel jelöljük, a gúla 4-élű csúcsát O-val, ennek vetületét az $ABCD$ alapsíkon O'-vel, az $O'O$ magasságot m-mel. Hosszegységnek S éleit választjuk.

a) Ha mind a 4 oldallapot S-nek vesszük, nyilván megfelel a szabályos négy oldalú gúla. De azt is be kell látnunk, hogy más lehetőség ekkor nincs. Mind a négy oldalél **1**, tehát A, B, G, D az O körüli, 1 sugarú gömbnek és az alapsíknak a metszésvonalán vannak. Ez kör, tehát az alapidom húrnégyszög. És mivel mindegyik alapél hossza is 1, az alap csak a szabályos négyszög lehet. – (Alább még néhányszor kapunk hasonlóan húrnégyszöget, azt már indokolás nélkül csak kimondjuk; más ismétlődő elemeket is csak először részletezünk.) – Tovább az R-lapok számát 1-esével növeljük.

b) Ha 1 oldallap R – legyen ez a DOA lap –, akkor a kiterítés 3 db S-ből álló, összefüggő „blokk”-ján $OA = OD$, tehát R csak két egyenlő oldalával, a két befogójával illeszkedhet közéjük, $DOA\sphericalangle = 90°$. Az alap – ha létezik – csak húrnégyszög lehet, benne $AD = \sqrt{2}$, a többi oldal 1, és a köré írt kör $O'A = r$ sugara kisebb, mint 1. Ugyanis 1 sugarú körben fölmérve az 1, 1, 1, $\sqrt{2}$ húrokat, csak $3 \cdot 60° + 90°$ ívet vágnánk le, nem záródnék a négyszög. Könnyű utánaszámítani, hogy az alapnégyszög valóban így jön létre. így az $00' = \sqrt{1 - r^2}$ magasság pozitív, a gúla létrejön (1. ábra, palást és vetület az alapon, az AD, BC élek közös felező merőleges síkja szimmetriasík).



1. ábra

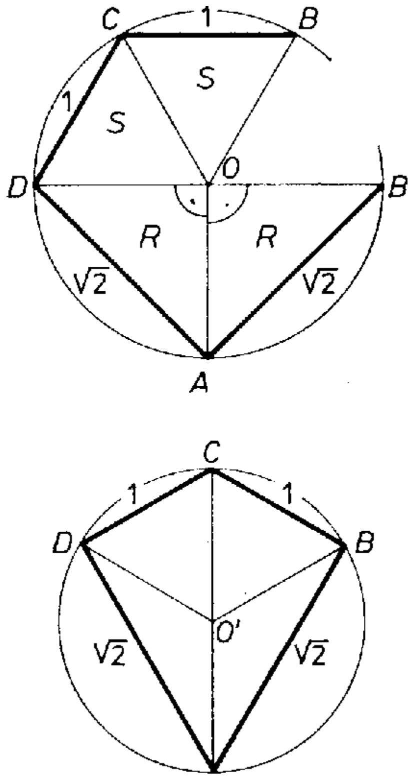
– Tovább is mindaddig úgy beszélünk, hogy a palástból keletkezik gúla, míg csak ez meg nem cáfolódik.

c) Két db R-lap esetében az oldallapok ciklikus sorrendje lehet $SSRR$ és $SRSR$.

c_1) Az $SRSR$ sorrend mellett a két nem szomszédos S-lap révén minden oldalél hossza 1, az R-ek itt is csak a derékszögükkel illeszthetők O-ba, átfogóik az alapra jutnak, az alapidom húrparalelogramma, azaz húrtéglalap 1 és $\sqrt{2}$ oldalakkal, $r = \sqrt{3/2}$, a gúla létrejön (2 szimmetriasíkja is van).

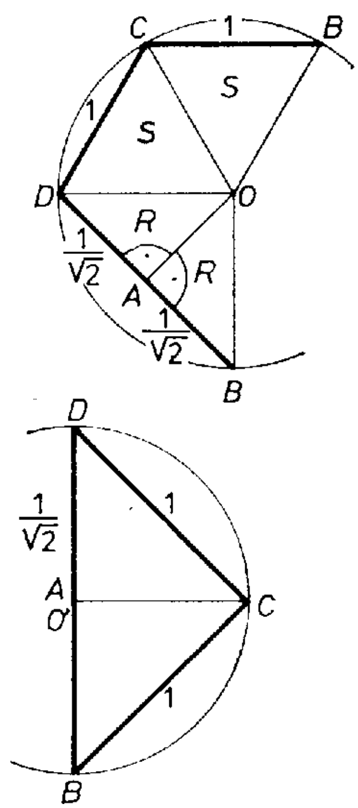
Az $SSRR$ sorrend mellett betűzzük az SS blokkot $OBCD$-vel. Ekkor az R-lapok közös OA élének hossza vagy 1, vagy $1/\sqrt{2}$ vagy $\sqrt{2}$, aszerint, hogy a derékszög csúcsa mindkettőben O, illetve A, illetve ha külön vannak B-ben és D-ben (2–4. ábrák). Ezért a palást finomabb leírásában az R jelek közé odaírjuk OA-nak éppen vizsgált hosszát.

c_2) Az S, S, R, (1), R esetben is húrnégyszög az alap, pontosabban húrdeltoid, oldalai 1 és $\sqrt{2}$ tehát a két egyenlő szöge derékszög, tengelyének hossza $\sqrt{3}$, ismét $m > 0$ (2. ábra, AOC szimmetriasík).



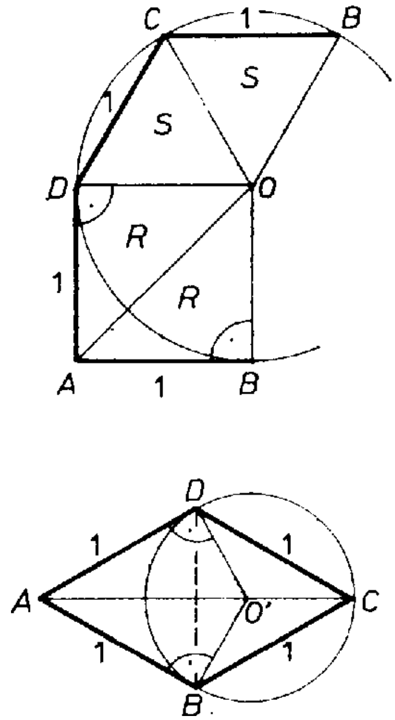
2. ábra

c_3*)* Az S, S, R, $(1/\sqrt{2})$, R esetben a palást nem 4, hanem 3-oldalú gúlává áll össze. Ugyanis jelölésünk szerint OA merőlegesen áll AB-re és AD-re, tehát az ABD alapsíkra is, ezért O' azonos A-val. Továbbá $OB = OC = OD$ alapján a B, C, D kör sugara $O'B = AB = 1/\sqrt{2}$, ugyanekkora AC is, ekkor pedig $BC = 1$ alapján $BAC\sphericalangle = 90^\circ = DAC\sphericalangle$, A felezi a BD szakaszt, az OAB, OAD lapok egy síkba esnek (3. ábra).



3. ábra

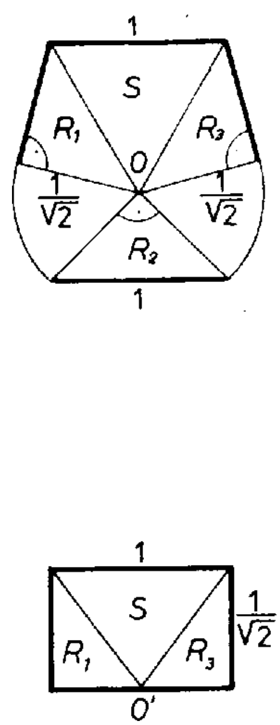
c_4*)* Az S, S, R, $(\sqrt{2})$, R esetben az alap 1 oldalú rombusz, O' a B, C, D csúcsokon átmenő kör középpontja, az ABO és ADO derékszögek vetületei derékszögek. Ezért $AO' > O'B = O'C < \dfrac{AC}{2} < \dfrac{AB+BC}{2} = 1$, a BCD kör sugara < 1, a gúla létrejön (4. ábra, ACO szimmetriasík; egyébként könnyen adódik, hogy ekkor $OBCD$ szabályos tetraéder, és $OA \perp OC$).



4. ábra

d) Három db R-lap közül a két szélső: R_1 és R_3 az egyetlen S-hez egyformán vagy az átfogójával csatlakozik, vagy egyik befogójával, csak így lehet egybevágó ez a két lap.

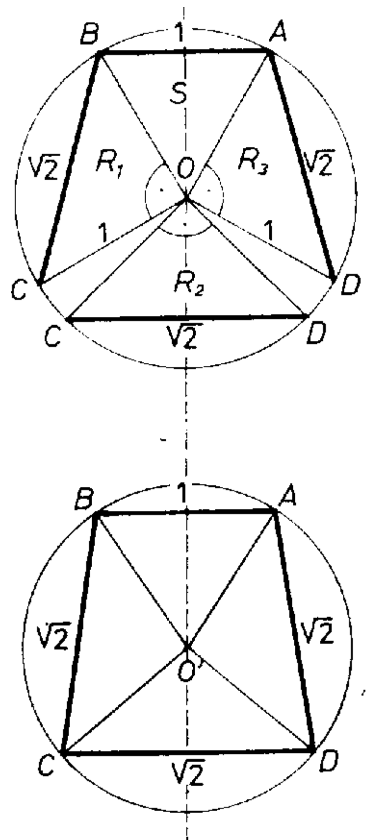
d_1) Az R_1, (átf.), S, (átf.), R_3 esetben a két még szabad oldalél befogó, tehát egyenlők, következésképpen R_2-nek a derékszöge jut O-ba. Így az alapélek 1, $\frac{1}{\sqrt{2}}$, 1, $\frac{1}{\sqrt{2}}$, az alap csak paralelogramma lehet, pontosabban téglalap, mert a palást szimmetrikus összeállítása alapján a gúla is szimmetrikus az 1-es alapélek felező merőleges síkjára. Így R_2 oldaléleinek vetületei éppen az átfogójára esnek, rövidülnek, tehát a gúla létezik, az R_2 lap merőleges az alapra (5. ábra, 1 szimmetriasík).



5. ábra

Az R_1, (bef.), S, (bef.), R_3 elindulásban e két R-lap derékszögű csúcsának a helyzetére 2 lehetőség veendő figyelembe (6–7. ábrák). Legyen ugyanis $S = OAB$, akkor vagy mindkét R-nek O-ba esik a derékszögű csúcsa, vagy az egyiké O-ba, a másiké – mondjuk A-ba. (Nem eshetnek A-ba és B-be, különben ugyanis $OC = OD = \sqrt{2}$ lenne, viszont a hátra levő R_2-nek csak egy oldala ekkora.)

d_2) Az első változatban R_2 ismét csak a derékszögével illeszkedhet O-ba, az alap húrnégyszög, 3 oldala $\sqrt{2}$, a negyedik 1. Ismét $r < 1$, mert $r = 1$ mellett a négy oldal csak 330°-ot fedne le a kerületből, a gúla létezik (6. ábra, 1 szimmetriasík).



6. ábra

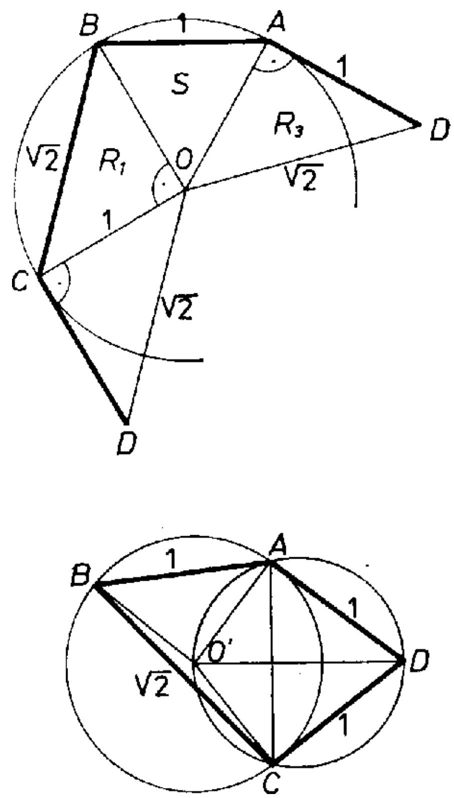
d_3) A második változatban $OC = 1$ és $OD = \sqrt{2}$, így $R_2 = COD$ beillesztése egyértelmű. Az alap 3 oldala 1, a negyedik $\sqrt{2}$, de a négyszög nem húrnégyszög és nem is szimmetrikus, ezért valamivel többet kell számolgatnunk, nincs-e ellentmondás ebben a szokatlan esetben. Felhasználjuk, hogy O' az A, B, C kör középpontja, másrészt hogy $O'CD$ és $O'AD$ derékszögek, tehát $O'ADC$ húrdeltoid. Jelöljük az $O'DA$ szöget δ-val, ekkor $AO'C\sphericalangle = 180° - 2\delta$, $ABC\sphericalangle = 90° - \delta$, és az ACB, ACD háromszögekből egybevetéssel, a cosinustétel alapján, valamint mindjárt trigonometrikus azonosságokat is figyelembe véve

$$AC^2 = 1 + 2 - 2\sqrt{2}\sin\ \delta = 1 + 1 - 2\ \cos\ 2\delta = 4\ \sin^2\ \delta.$$

Ez másodfokú egyenlet sin δ-ra, itt csak a pozitív gyök használható, és arra

$$\sin\ \delta = \frac{\sqrt{7}-1}{2\sqrt{2}} < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{mert} \quad \frac{\sqrt{7}-1}{2} < \frac{\sqrt{9}-1}{2} = 1.$$

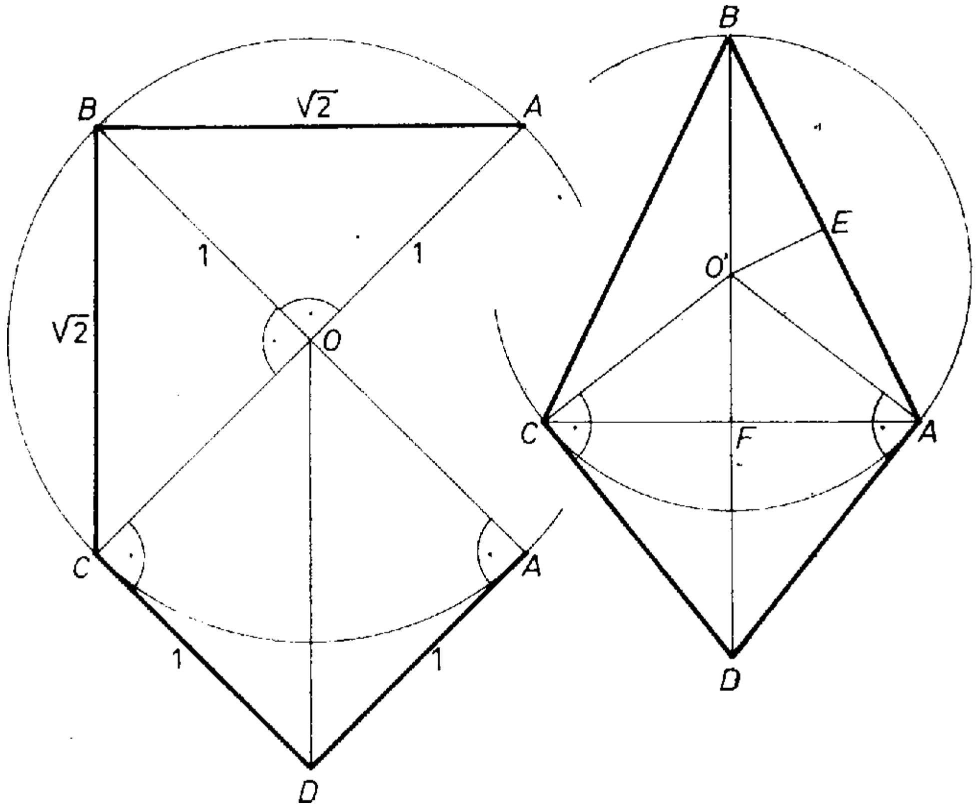
Ezért $\delta > 45°$, az A, B, C kör sugara $AD\mathrm{tg}\ \delta < 1$, így pedig $m > 0$, a gúla létezik (7. ábra).



7. ábra

e) Végül, ha mind a 4 oldallap R, két próbálkozásunk sikertelen. Ha O-ban mind a 4 lapot a derékszögével fogjuk össze, a palást 0 magasságú gúlát ad, hiszen az alap mindegyik oldala $\sqrt{2}$, és így $r = 1$; ha pedig O-ban 45°-os szögeket illesztünk össze, az „oldaléljelöltek" váltakozva 1 és $\sqrt{2}$ hosszúak; és ha $OA = OC = 1$, akkor az „alap" AC átlójának O-tól való távolsága kisebb, mint 1, a BD átlóé pedig nagyobb, mint 1, mert a 3-élű $(O)BAD$ testszögletben $BOD\sphericalangle < BOA\sphericalangle + AOD\sphericalangle = 90°$, így csak az OAC háromszög szakasszá elfajulása esetében lehet mind a kettő 1 (gyermekcsákó készítése újságpapírból).

Az utolsó lehetőség viszont ismét sikeres, ez adja tehát a feladat második része szerint végzendő számítás tárgyát: amikor 0-ban a szögek 90°, 90°, 45°, 45°; az utóbbi kettő legyen az OD él két oldalán. Az alap deltoid, szimmetriatengelye BD, és ezen van O' is, mint az A, B, C kör középpontja. m-et fogjuk meghatározni, és ezzel fejezzük ki a további számításhoz szükséges BD, AC átlókat is (8. ábra).



8. ábra

Jelöljük az átlók metszéspontját F-fel, AB felezőpontját E-vel. Így

$$OE = EA = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad O'E = \sqrt{\frac{1}{2} - m^2},$$
$$O'B = O'A = \sqrt{1-m^2} \quad O'D = \sqrt{2-m^2},$$

az AFB, $O'EB$ háromszögek hasonlóságából

$$AF = O'E\frac{AB}{O'B} = \sqrt{\frac{1-2m^2}{1-m^2}} = \sqrt{1 - \frac{m^2}{1-m^2}},$$

továbbá a DFA, $O'FA$ derékszögű háromszögekből

$$DF = \frac{m}{\sqrt{1-m^2}}, \quad \text{illetve} \quad O'F = \frac{m^2}{\sqrt{1-m^2}}.$$

Most már a nyilvánvaló $DF + FO' = DO'$ egyenlőségből:

$$\frac{m+m^2}{\sqrt{1-m^2}} = \sqrt{2-m^2},$$
$$m^3 + 2m^2 - 1 = 0.$$

Könnyű látni, hogy $m = -1$ kielégíti ezt az egyenletet, tehát a bal oldal szorzatra bontható úgy, hogy az egyik tényező $m+1$:

$$(m^3 + m^2) + (m^2 - 1) = (m+1)(m^2 + m - 1) = 0.$$

Számunkra csak az

(1) $$m^2 + m - 1 = 0$$

egyenlet pozitív gyöke felel meg:

(2) $$m = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Felismerjük ebben az „aranymetszés” szerint kettéosztott egységszakasz nagyobbik részének a mértékszámát – amint már (1)ben. is felismerhetjük a megfelelő egyenletet –, és erről eszünkbe jut, hogy több ezzel kapcsolatos számkifejezés jelentősen egyszerűsíthető. Itt is ilyen szerencsénk lesz. Mivel (1)ből $1-m^2=m$ és $1-m=m^2$, továbbá $2-m^2=1+m$, ezért a fentiekből az átlók darabjaira, majd a V térfogatra

$$O'B=\sqrt{m},\quad O'D=\sqrt{1+m},\quad AF=\sqrt{1-m}=m,$$
$$3V=O'O\cdot AF\cdot BD=m^2(\sqrt{1+m}+\sqrt{m}).$$

Tovább egyszerűsödik kifejezésünk, ha kétszer alkalmazzuk a (2)-ből a számláló gyöktelenítése útján adódó következő kifejezést:

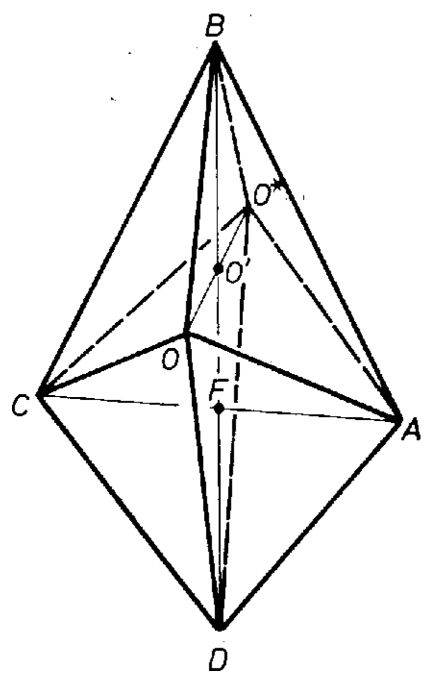
$$1+m=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\frac{2}{\sqrt{5}-1}=\frac{1}{m},$$
$$3V=m^2\left(\frac{1}{\sqrt{m}}+\sqrt{m}\right)=m\sqrt{m}(1+m)=\sqrt{m},$$
$$V=\frac{\sqrt{m}}{3}=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{18}}=0{,}262 \text{ térfogategység.}$$

(Kis számítógéppel végrehajtva kényelmesebb, ha csak egy helyen osztunk, ezért vittük be az osztót.)

Ezzel a feladat második részét is befejeztük. Mondjuk ki, hogy az első kérdésre 9 megfelelő gúlát találtunk.

Cseke István és *Knébel István*
(Budapest, József A. Gimn., IV. o. t.) dolgozataiból, kiegészítéssel

Megjegyzések. 1. Figyeljünk fel az iménti meglepően egyszerű $AF=m$ részeredményre. Az ilyen megállapítás mögött nemegyszer egyszerű magyarázat is áll. Tükrözzük gúlánkat az alapsíkra és jelöljük O képét O^*-gal (9. ábra). Ekkor az OBO^*D deltoid egybevágó az alappal, a csúcsok $CDAB$ körüljárás szerinti megfeleltetésével, vagyis B és D szerepcseréjével, hiszen oldalaik és tengelyük rendre egyenlők. – Ezzel megmagyaráztuk: nem jutott hibás eredményre, aki FB-re használta fel $O'D$ fenti kifejezését m kiszámításában – csak hát meg kellett volna indokolnia ezt a lépést.



9. ábra

2. A 9. ábrán kapott poliéder B és D csúcsában éppen olyan 4-élű szögletek vannak, amilyen utolsó előtti próbálkozásunkban szerepelt, de nem sikerült egy síkba hozni az A, O, C, O^* pontokat. Egyes kristályosztályokban is föllép az itt látható „forgótükrözéses" szimmetria: a test fedésbe jut önmagával BD körüli negyedfordulat és a tengely felező merőleges síkjára való tükrözés *együttes* alkalmazásával.

Hasonlóan többi gúláink tükrözésével is az alap csúcsaiban a már vizsgált 4-élű szögletek valamelyike adódik, de a 4 élvégpont többnyire nincs egy síkban.