

$$(1) \quad P(x^5) + xQ(x^5) + x^2R(x^5) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)S(x).$$

**I. megoldás.** Tetszőleges  $F(x)$  polinomra igaz, hogy  $F(x) - F(1)$  osztható  $(x - 1)$ -gyel. Legyen ugyanis  $F(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$  ekkor  $F(x) - F(1) = a_n(x^n - 1) + \dots + a_1(x - 1)$ , amelyben minden tag osztható  $(x - 1)$ -gyel.

A  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  polinomokat ennek alapján írjuk a következő alakba

$$P(x) = (x - 1)p(x) + P(1),$$

$$Q(x) = (x - 1)q(x) + Q(1),$$

$$R(x) = (x - 1)r(x) + R(1).$$

A polinomokra érvényes az (1) egyenlőség, ezért

$$\begin{aligned} (x^5 - 1)[p(x^5) + xq(x^5) + x^2r(x^5)] + P(1) + xQ(1) + x^2R(1) = \\ = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)S(x). \end{aligned}$$

Mivel  $(x^5 - 1)$  osztható  $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)$ -nel, ezért az egyenlőség minden  $x$ -re csak akkor teljesül, ha  $P(1) + xQ(1) + x^2R(1)$  is osztható  $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)$ -nel. Ez viszont csak úgy lehetséges, ha  $P(1) = Q(1) = R(1) = 0$ , amiből következik, hogy  $P(x)$ ,  $Q(x)$ ,  $R(x)$  egyaránt osztható  $(x - 1)$ -gyel.

Az egyenlőségből látható, hogy  $S(1) = 0$  is teljesül, tehát  $S(x)$  is osztható  $(x - 1)$ -gyel.

*Dózsa Gábor* (Szeged, Radnóti M. Gimn., IV. o. t.)

**II. megoldás.** A polinomok között fennálló (1) egyenlőséget írjuk a

$$P(x^5) + xQ(x^5) + x^2R(x^5) = \frac{x^5 - 1}{x - 1}S(x)$$

alakba. Jelentse  $z$  az egytől különböző négy komplex ötödik egységgyök valamelyikét. Ezekre  $z^5 - 1 = 0$ , de  $z - 1 \neq 0$ , így

$$P(1) + zQ(1) + z^2R(1) = 0.$$

Ez  $z$ -re nézve másodfokú egyenlet, másrészt tudjuk, hogy van négy különböző megoldása, ami csak úgy lehetséges, ha  $P(1) = Q(1) = R(1) = 0$ , tehát  $P(x)$  osztható  $(x - 1)$ -gyel.

*Homonnay Géza* (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., IV. o. t.)

*Megjegyzések.* 1. Egyik megoldás sem használta ki, hogy a polinomok egész együtthatósak, valós (sőt komplex) együtthatók is megengedhetők.

2. Mindkét megoldásból látható, hogy

$$P(x^5) + xQ(x^5) + x^2R(x^5) + x^3T(x^5) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)S(x)$$

feltétel esetén is igaz az állítás. Általában, ha

$$P_1(x^n) + xP_2(x^n) + \dots + x^{n-2}P_{n-1}(x^n) = (1 + x + \dots + x^{n-1})P_n(x),$$

akkor mindegyik  $P_i(x)$  polinom osztható  $(x - 1)$ -gyel.

**(G.L.)**