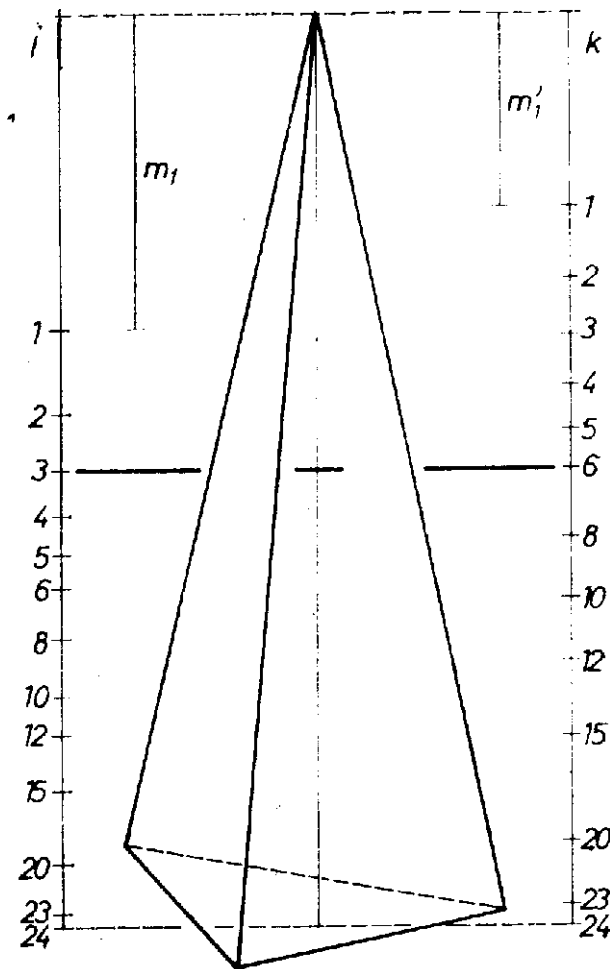


1. A csonkagúlánk helyett az eredeti gúla csúcsa és az alapjával párhuzamos síkok által meghatározott gúlákat vizsgáljuk. A síkoknak a közös csúcstól mért távolságai legyenek $m_1, m_2, \dots, m_{24}$ ($m_{24} = m$, az eredeti gúla magassága). Ha az eredeti gúla térfogata V , akkor az m_i magasságú gúláé a felosztás szerint $V_i = \frac{i}{24} V$, tehát $V_i/V = i/24$, $i = 1, 2, \dots, 23$.



A gúlánk megfelelő lapjait alkotó háromszögek, ill. az alapsokszögek hasonlóak, a megfelelő élek aránya m_i/m , ezért $V_i/V = m_i^3/m^3$. A két egyenlőségéből következik, hogy

$$m_i = m \sqrt[3]{\frac{i}{24}}.$$

A második felosztás esetén az m'_k magasságú gúla palástfelszíne $F_k = \frac{k}{24} F$, ahol F az eredeti gúla palástfelszíne, $k = 1, 2, \dots, 23$, így $F_k/F = k/24$. A hasonlóság alapján $F_k/F = m_k'^2/m^2$, amiből $m'_k = m \sqrt{\frac{k}{24}}$.

A két síkhalmaznak akkor van közös síkja, ha valamilyen i, k számpárra teljesül, hogy $m_i = m'_k$. Ez azt jelenti, hogy

$$\sqrt[3]{\frac{i}{24}} = \sqrt{\frac{k}{24}}, \quad \text{azaz} \quad 24 i^2 = k^3.$$

Mivel $24 = 3 \cdot 2^3$, azért az $i = 3, k = 6$ számpárra teljesül a feltétel: az első felosztás harmadik síkja egybeesik a második felosztás hatodik síkjával. Ez a sík félmagasságban vágja ketté a gúlát, fölötte van a V térfogat $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{24}$ -ed része és az F palást felszín $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{24}$ -ed része.

2. Ha a gúlát n síkkal osztjuk a két elv szerint részekre, akkor az előzőekhez hasonlóan feltételként az

$$(n+1)i^2 = k^3, \quad 1 \leq i, \quad k \leq n$$

egyenletre jutunk. Amely $(n+1)$ értékekre van megoldás, a kétféle n -elemű síkhalmaznak van közös síkja.

Ha mármost $(n + 1)$ törzstényezős felbontásban nem fordul elő harmadik vagy annál magasabb hatvány, akkor az egyenletnek nincs megoldása az $1 \leq i, k \leq n$ követelmény mellett. Ekkor ugyanis $(n + 1)$ felbontásban minden előforduló prímszám kitevője vagy $\alpha = 1$, vagy $\alpha = 2$, és ezt i^2 -nek kell (k^3 céljára) 3-ra vagy 3 valamely többszörösére emelnie, $\alpha = 1$ -ről legalább 3-ra, $\alpha = 2$ -ről pedig legalább 6-ra, hiszen i^2 -ben páros a kitevő. Így i -nek tartalmaznia kell $(n + 1)$ -nek minden prímtényezőjét legalább akkora kitevővel, mint maga $(n + 1)$, ami csak $i \geq n + 1$ mellett lenne lehetséges.

Ha viszont $n + 1 = q \cdot p^3$, ahol $p > 1$ és q természetes számok, akkor pl. az $i = q, k = q \cdot p$ számpár minden $q = 1, 2, 3, \dots$ mellett megoldása az egyenletnek. A 100 alatti köbszámok 8, 27, 64, ezért a megfelelő n értékek:

7, 15, 23, 26, 31, 39, 47, 53, 55, 63, 71, 79, 80, 87, 95.

Már itt észrevevesszük, hogy az $n = 63$ -at kétféleképpen is megkaptuk: $63 = 8 \cdot 2^3 - 1 = 1 \cdot 4^3 - 1$, tehát itt két közös síkot kapunk: $i = 8, k = 16$ és $i = 1, k = 4$.

Baksai Róbert (Győr, Révai M. Gimn. IV. o. t.)