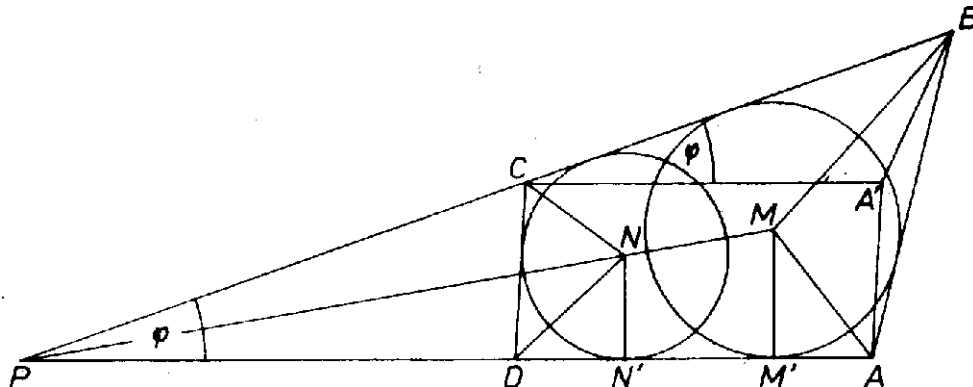


1. Jelöljük a  $\varphi$  szög csúcsát  $P$ -vel, és a számpélda  $AB = 2 \cdot CD$  összefüggésére gondolva, válasszuk úgy a betűzést, hogy  $PD < PA$  legyen, így a konvexitás alapján  $PC < PB$  is teljesül. (Lényegében azonos a meggondolás a  $PD > PA$  kiindulásból is.) Eszerint a  $PDC$  háromszög benne van a  $PAB$  háromszögben, a szögfelezőkre tekintettel  $M$  a  $PAB$  háromszögbe beírt kör középpontja,  $N$  pedig a  $PDC$  háromszög  $DC$  oldalához hozzáírt külső érintő kör középpontja, tehát mindkettő rajta van a háromszögek közös  $P$  csúcsánál levő szög felezőjén, és  $MN = |PM - PN|$ .



Jelöljük  $M$ -nek és  $N$ -nek a közös  $PA$  oldalegyenesen levő vetületét, az említett körök érintési pontját  $M'$ -vel, ill.  $N'$ -vel, ekkor

$$MN = \frac{M'N'}{\cos \varphi/2} = \frac{|PM' - PN'|}{\cos \varphi/2},$$

és itt – mint az érintési pontokig terjedő oldalszakaszokra ismeretes –

$$PM' = \frac{1}{2}(PA + PB - AB) = \frac{1}{2}(PD + DA + PC + CB - AB),$$

$$PN' = \frac{1}{2}(PD + PC + CD),$$

ennélfogva

$$MN = \frac{1}{2 \cos \frac{\varphi}{2}} \cdot |(DA + CB) - (AB - CD)|.$$

Eredményünknek az a speciális esete, amikor  $M$  és  $N$  egybeesik,  $MN = 0$ , vagyis egyenlő távolságra vannak az  $ABCD$  négyszög mindegyik oldalától éppen azonos az  $ABCD$ -be beírt kör létezésének ismert szükséges feltételével (ami – mint sokan tudják – egyszersmind elegendő feltétel is).

2. A számpéldában először azt az esetet vesszük, ha  $\varphi$  hegyesszög, vagyis

$$\cos \varphi = +0,96; \text{ ekkor } \cos \frac{\varphi}{2} = +\sqrt{\frac{1 + \cos \varphi}{2}} = +\frac{1,4}{\sqrt{2}},$$

és

$$MN = \frac{\sqrt{2}}{2,8} |75 + 100 - 70 - 35| = 25\sqrt{2} \approx 35 \text{ egység.}$$

Ha viszont  $\varphi$ -t tompaszögnek próbáljuk venni:

$$\cos \varphi = -0,96, \quad \text{akkor} \quad \cos \frac{\varphi}{2} = \frac{0,2}{\sqrt{2}},$$

ebből  $MN = 175\sqrt{2} \approx 247,5$  adódik, és ez lehetetlen, hiszen négyszögünk  $AC$  átlója kisebb, mint az  $AD + DC = 110$  és az  $AB + BC = 170$  összegek kisebbike, azaz mint 110, és a  $BD$  átló kisebb, mint  $DA + AB = 145$  és  $BC + CD = 135$  kisebbike, 135, tehát négyszögünk nem tartalmazhat 110 és 135 nagobbikánál hosszabb szakaszt.

*Megjegyzés.* Csekély többletszámítással az is adódik, hogy négyszögünk trapéz, a  $CD$  oldal a  $PAB$  háromszögnek  $BA$ -val párhuzamos középvonala. Eljuthatunk erre úgy, hogy azt az eljárást követjük számítással, ahogyan adatainkból és a  $0^\circ < \varphi < 90^\circ$  mellékfeltevésből az  $ABCD$  négyszöget szerkesztenénk ( $DA$  eltolása a  $CA'$  helyzetbe,  $BCA'$  háromszög,  $BA'A$  háromszög az oldalaiból, és  $A'C$  eltolása  $AD$ -be; ezúttal  $BA' + A'A = BA$ -nak adódik). A  $PAB$  háromszög hasonló a 2028. feladatban vizsgált háromszöghöz (KÖMAL 53. köt. (1976) 123. old.).