

Tegyük fel, hogy h egy olyan függvény, amelyik kielégíti a feltételeket, azaz minden valós számra értelmezve, van minden valós értéket pontosan egyszer vesz fel és minden valós x -re teljesül, hogy

$$(1) \quad h(x^2 + ax + b) = (h(x))^2.$$

A $(h(x))^2$ függvény minden pozitív valós számot pontosan kétszer vesz fel, a 0-t pedig egyszer. Az

$$x^2 + ax + b = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + b - \frac{a^2}{4}$$

függvény a minimumát $x = -\frac{a}{2}$ -nél veszi fel, minden más – a minimumnál nagyobb – értéket pontosan kétszer vesz fel. Ebből következik – figyelembe véve a h függvény tulajdonságát –, hogy $x = -\frac{a}{2}$ -re az (1) egyenlőség mindkét oldala 0 értéket ad, azaz

$$h\left(b - \frac{a^2}{4}\right) = h\left(-\frac{a}{2}\right) = 0.$$

Mivel a h függvény a 0-t is csak egy helyen veszi fel, tehát

$$(2) \quad b - \frac{a^2}{4} = \frac{a}{2}$$

szükséges feltétele annak, hogy a két függvény hasonló legyen.

A (2) feltétel teljesülése elégséges is, mert például a $h(x) = x + \frac{a}{2}$ függvény kielégíti a feladat feltételeit.

Knébel István (Budapest, József A. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. Könnyen ellenőrizhető, hogy a feladat feltételeit a

$$h(x) = \left(x + \frac{a}{2}\right)^{2k-1} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

függvények mind kielégítik.

2. A feltételeket kielégítő h függvénynek van inverz függvénye is, jelöljük ezt h^{-1} -gyel. A h^{-1} függvény szintén kielégíti a feltételeket, ha f és g szerepét felcseréljük, azaz a $h(f(x)) = g(h(x))$ egyenlőtlenségből $h^{-1}(g(x)) = f(h^{-1}(x))$ következik. Az f és g függvények szerepe tehát szimmetrikus.