

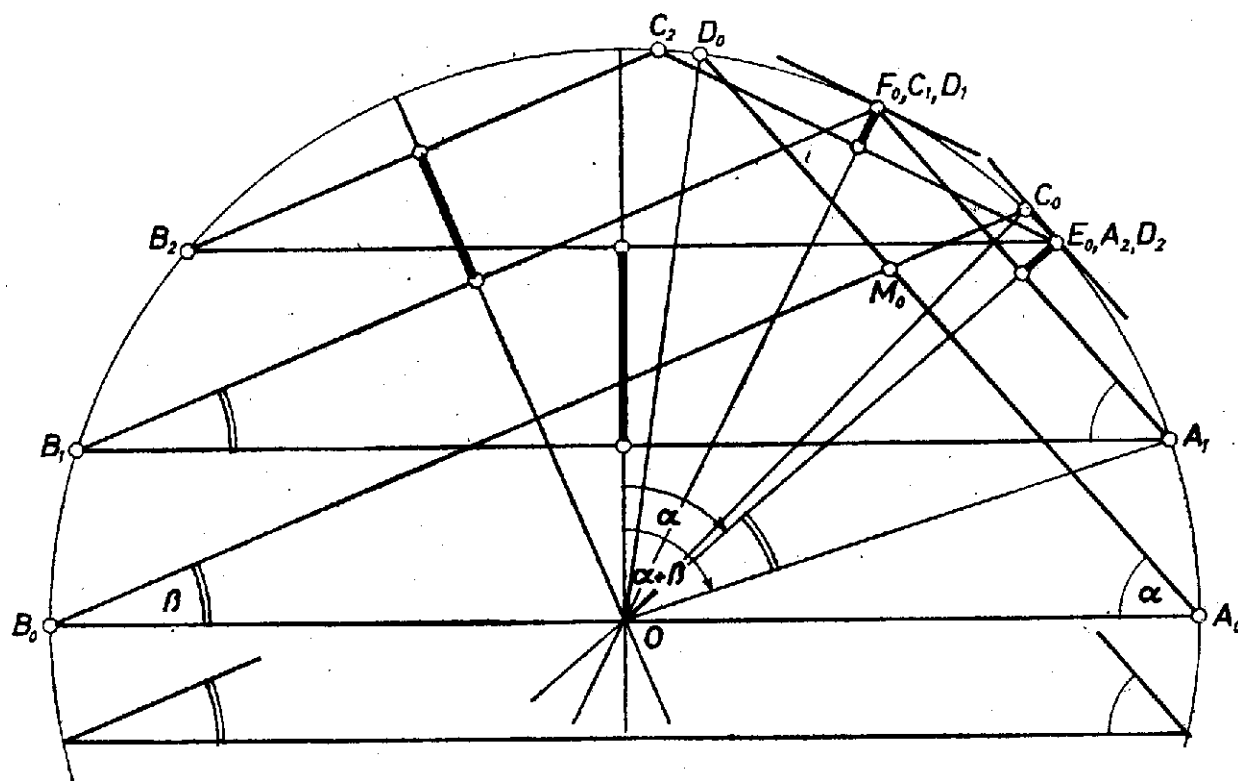
1. Két hegyesszög összege nem érheti el a 180° -ot, amennyi bármely konvex húrnégyszögben két szemben fekvő szög összege, ezért a két adott értékű hegyesszög négyszögeink valamelyik oldalának végpontjaiban van. Válasszuk úgy az $ABCD = N$ négyszög betűzését, hogy ez az oldal AB , és az adott két szög α, β legyen úgy, hogy

$$90^\circ > \angle BAD = \alpha \geq \beta = \angle ABC > 0^\circ.$$

Tartsuk k (és N) síkját függőlegesen és az AB oldalt vízszintesen úgy, hogy C és D följebb legyenek, mint A . Ekkor k tetszőleges pontját A -nak választva, kijelölhetjük B, C és D helyzetét, az utóbbi két szögpont azonban nem mindig jön létre, és ha létrejönnek, akkor sem mindig konvex négyszöget ad az önmagában záródó $ABCD$ útvonala. Feladatunk első része éppen ennek vizsgálata, ebből azután kiadódnak az egyes oldalak keresett korlátai.

Az előzőkkel az első három oldal irányain túl a DC oldal irányát is meghatároztuk, hiszen a D -nél levő külső szög β , és így a DC oldal $(\alpha - \beta)$ szöggel hajlik a vízszintes AB -hez. Így mind a 4 oldal felezőpontja csupán az illető irányra merőleges átmérőn mozoghat (pontosabban azoknak is csak 1-1 szakaszán). Célszerű ezt a 4 átmérő kijelölése után így mondani: N egyes oldalainak két végpontja mindig egymás tükrös párja a megfelelő átmérőre nézve.

2. Válasszuk A kiinduló helyzetétől k vízszintes átmérőjének A_0 jobb oldali végpontját, vegyük hozzá a B_0, C_0, D_0 pontokat, és vizsgáljuk először az olyan α, β értékpárok esetét, amelyek mellett a két szög A_0D_0 és B_0C_0 ferde szárai a k belsejében vagy éppen a k -n levő M_0 pontban metszik egymást (1. ábra).



1. ábra

Akkor ilyen a helyzet, ha

$$\angle A_0M_0B_0 = 180^\circ - (\alpha + \beta) \geq 90^\circ, \quad \text{azaz} \quad \text{ha} \quad \alpha + \beta \leq 90^\circ.$$

Ekkor az A_0D_0 és B_0C_0 „oldalak” szétválasztják egymás végpontjait, N_0 hurkolt négyszög, illetve $\alpha + \beta = 90^\circ$ esetén C_0, D_0 és M_0 egybeesése folytán derékszögű háromszög, semmiképpen nem a „mi négyszögünk”. Viszont már így is kijelölhetjük az oldalirányokra merőleges átmérőket; pontosabban mondva, elég lesz az AD és a DC oldalra merőleges átmérő E_0 , illetve F_0 felső végpontja, ezt nyilván az A_0D_0 , illetve a D_0C_0 ív felezőpontja adja meg.

Ilyen marad a helyzet akkor is, ha A -t lefelé toljuk k alsó pontjáig, és egy darabig akkor is, ha A_0 -tól fölfelé toljuk. Az eddigi hurkoltság, (C_0 és D_0 nem megfelelő sorrendje) akkor szűnik meg, amikor az egymással szemben haladó C és D összetalálkoznak F_0 -ban; nevezzük ezt négyszögünk (1-es indexű) N_1 helyzetűnek, bár C_1 és D_1 egybeesése miatt még ez is csak háromszög. De ha az ehhez tartozó A_1 -től – ami $F_0 \equiv D_1$ -nek E_0 -ra vonatkozó tükörképe – bármily kicsivel is feljebb vesszük A -t, megfelelő négyszöget kapunk.

Tovább tolva A -t, A és D találkoznak össze E_0 -ban, négyszögünknek ez az N_2 helyzete már ismét csak háromszög, és innen kezdve az AD félegyenes meredekebb, mint k -nak A -beli érintője, tovább tehát nincs mit keresnünk. (Ha $\beta = \alpha$, akkor A és D -vel egyidejűen B és C összetalálkoznak, $\beta < \alpha$ esetén azonban ez nem áll be.) Ezek szerint D az N -nek a „kényes” pontja.

Összefoglalva az eddigieket: N_0 csúcsai és E_0, F_0 , kijelölése után akkor kapunk konvex (és előírt irányú oldalakkal bíró) négyszöget, ha D -t az E_0F_0 ív belsejében vesszük fel – és ekkor tovább E_0 -ra, F_0 -ra való tükrözéssel kapjuk D -ből A -t, C -t, végül A -val „egy magasságban” B -t. Egyben az oldalhosszúságok keresett korlátai, míg a háromszöggé elfajult N_1 és N_2 között haladunk:

$$\begin{aligned} B_1A_1 &> BA > B_2A_2 = B_2E_0, & A_1D_1 &> AD > 0, \\ 0 < DC < D_2C_2 = E_0C_2, & F_0B_1 = C_1B_1 &> CB > C_2B_2, \end{aligned}$$

itt B_1, B_2 az A_1 -gyel, A_2 -vel egy magasságban levő pontja k -nak, C_2 pedig E_0 tükröke F_0 -ra. Egyenlőség sehol nincs megengedve. Az oldalak tengelyeinek figyelembe jövő szakaszait az 1. ábrán vastagítottuk.

3. Könnyű belátni, hogy az

$$A_1B_1, \quad B_1C_1, \quad C_1A_1, \quad A_2B_2, \quad B_2C_2, \quad C_2D_2$$

húrnak az O középpontból vett látószöge rendre

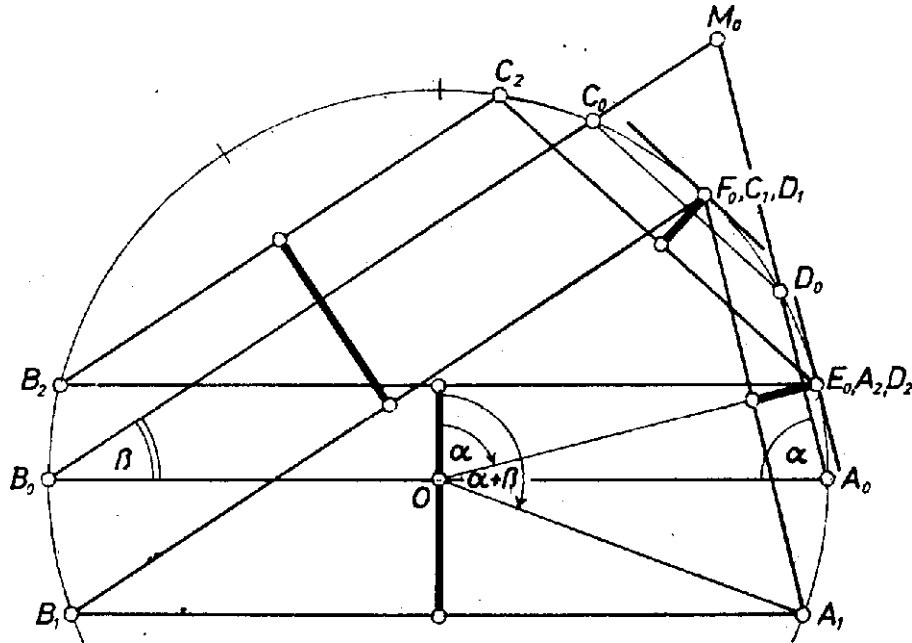
$$2(\alpha + \beta), \quad 2\alpha, \quad 2\beta, \quad 2\alpha, \quad 2(\alpha - \beta), \quad 2\beta,$$

ennélfogva a vizsgált esetben

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &> BA > \sin \alpha, & \sin \beta &> AD > 0, \\ 0 < DC < \sin \beta, & \sin \alpha &> CB > \sin(\alpha - \beta), \end{aligned}$$

és BA esetére a kiindulás biztosítja, hogy $\sin(\alpha + \beta) > \sin \beta$.

4. Hasonlóan tárgyalható az olyan α, β értékpárok esete, amelyekre M_0 a k -n kívül adódik, $\alpha + \beta > 90^\circ$ (2. ábra).



2. ábra

Eltérés csak az, hogy ekkor mindjárt N_0 a mi négyszögünk, továbbá C -nek és D -nek E_0 -ban való összetalálkozását A -nak A_0 -ból lefelé való elmozdítása okozza, AB az $A_0B_0 = 1$ értéktől az A_1B_1 és A_2B_2 húrok kisebbikéig csökkenhet (az egyenlőség kizárásával), és itt $\sin(\alpha + \beta) \geq \sin \alpha$ mindegyike lehetséges.

Ehelyett inkább számítással, formálisan vizsgáljuk pontjaink helyes sorrendjének feltételeit.

Körünk P pontjait az irányított A_0OP szöggel jellemezzük. Legyen A ilyen koordinátája φ , akkor B koordinátája $180^\circ - \varphi$, ahol $-90^\circ < \varphi < 90^\circ$, továbbá $\angle DOB = 2 \angle DAB = 2\alpha$, $\angle AOC = 2 \angle ABC = 2\beta$ alapján C és D koordinátája $\varphi + 2\beta$, ill. $180^\circ - \varphi - 2\alpha$. (B, C és D tehát az A -éval egyenlő sebességgel mozognak, A és C az egyik, B és D a másik forgási irányban.) Ahhoz, hogy $ABCD$ konvex négyszög legyen, szükséges és elegendő, hogy álljon (jelképesen $A < D < C < B$, azaz)

$$\varphi < 180^\circ - \varphi - 2\alpha < \varphi + 2\beta < 180^\circ - \varphi.$$

Az első kettőből $\varphi < 90^\circ - \alpha$, emiatt kell A -nak az $E_0 \equiv A_2$ alatt maradnia, hiszen (jelképesen)

$$E_0 = \frac{1}{2}(A + D) = 90^\circ - \alpha.$$

Ez mindig k felső felén van. A másodikból és a harmadikból $\varphi > 90^\circ - \alpha - \beta$, és itt a jobb oldal A_1 koordinátája; hiszen

$$A_1 = 2E_0 - F_0 = (A + D) - \frac{D + C}{2} = \frac{1}{2}(2A + D - C) = 90^\circ - \alpha - \beta.$$

(Ez lehet A_0 fölött is, alatta is.)

Az utolsó két koordináta közti egyenlőtlenség nem hoz új korlátozást: $\varphi < 90^\circ - \beta$, ez $\beta \leq \alpha$ és $\varphi < 90^\circ - \alpha$ következtében teljesül.

Mint látjuk, e számítás elemzése nem teheti fölöslegessé $\alpha + \beta$ és 90° nagyságviszonyának figyelembevételét.