I. megoldás. Az állítás ekvivalens azzal, hogy az F fókuszt megadja az M pont tükörképe a körök O_1, O_2 középpontjait összekötő centrálisra nézve. Még máshogyan, hogy az MF szakasz felező merőlegese átmegy O_i-n, $i = 1,\ 2$. Ezt bizonyítjuk koordináta-geometriai úton, az $y = x^2$ normálparabola alapulvételével, hiszen minden parabola ennek nagyított vagy kicsinyített, eltolt, elfordított képe.

Legyen T_i abszcisszája u_i ($u_2 \neq u_1 \neq 0$). Az $y = x^2$ függvény $y' = 2x$ deriváltja alapján t_i egyenlete:

$$y - u_i^2 = 2u_i(x - u_i),$$

ebből $t_1,\ t_2$ metszéspontja

$$M\left(\frac{u_1 + u_2}{2}, u_1u_2\right).$$

O_2-t az M-ben t_1-re emelt merőleges és MT_2 felező merőlegese metszéspontjaként számítjuk; egyenleteik

$$y = -\frac{x}{2u_1} + u_1u_2 + \frac{u_2}{4u_1} + \frac{1}{4}$$
$$x + 2u_2y = u_2^2(u_1 + u_2) + \frac{1}{4}(u_1 + 3u_2),$$

ezekből

$$O_2\left(-u_1u_2^2 + \frac{u_1}{4} + \frac{u_2}{2}; \qquad u_1u_2 + \frac{u_2^2}{2} + \frac{1}{8}\right).$$

Másrészt $F\left(0;\ \frac{1}{4}\right)$, az MF szakasz felező merőlegese:

(1) $$(u_1 + u_2)x + \left(2u_1u_2 - \frac{1}{2}\right)y = u_1^2u_2^2 + \left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) - \frac{1}{16}.$$

A behelyettesítés mutatja, hogy O_2 rajta van ezen az egyenesen. Ezzel az előrebocsátottak szerint állításunkat O_2-re bebizonyítottuk.

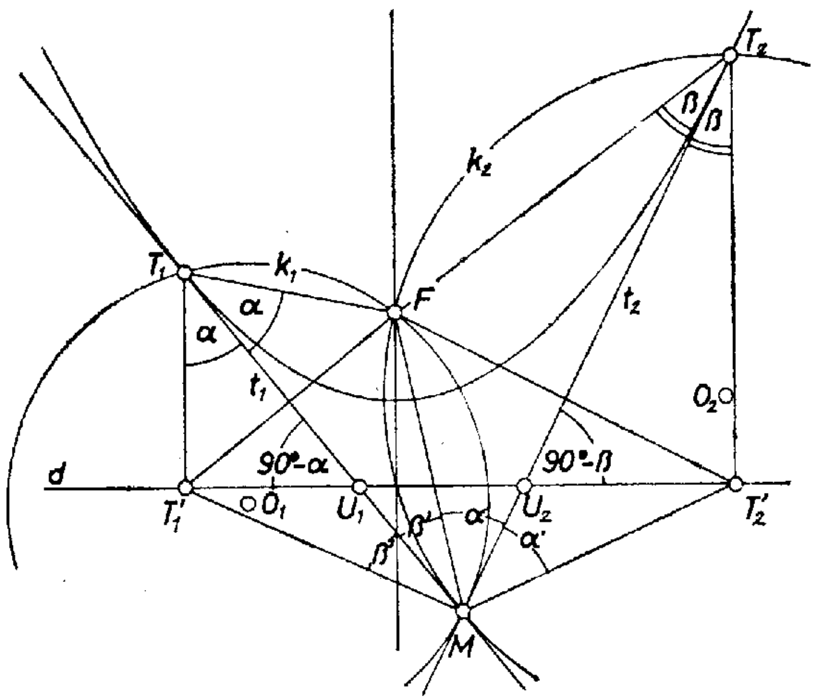
O_1-et O_2 ből az 1 és 2 indexek fölcserélésével kaphatnánk, hiszen O_1 meghatározásában t_1 helyére t_2 lép és T_2 helyére T_1, de O_1 koordinátáinak (1)-be való bepróbálása mellőzhető. Ugyanis azt az egyenletet mindenesetre kielégítenék, amely (1)-ből keletkezik az indexcserével, viszont ez a csere (1)-et önmagába viszi át. Eszerint (1)-et O_1 is kielégíti. – A bizonyítást befejeztük.

II. megoldás. Az F fókusz akkor és csak akkor van rajta k_1-en, ha az $\alpha' = T_2MF\sphericalangle$, ami az F illeszkedésétől függetlenül is (érintő szárú) kerületi szög a k_1-re nézve, egyenlő az $MT_1F\sphericalangle = \alpha$-val. Ugyanígy k_2 akkor és csak akkor megy át F-en, ha a $\beta' = T_1MF\sphericalangle$ és a $\beta = MT_2F\sphericalangle$-ek egyenlőek. Ezt a két szögegyenlőséget bizonyítjuk.

Legyen T_i vetülete a parabola vezéregyenesén T_i'. Ismeretes, hogy t_i felezi a T_iF és T_iT_i' félegyenesek közti szöget, másrészt a parabola definíciója alapján $T_iF = T_iT_t'$. Ezekből következik, hogy T_i és F egymás tükörképei t_i-re, tehát M-re mint a szimmetriatengely pontjára egyrészt $T_1'M = FM$, tehát $T_1'M = T_2'M$, másrészt $T_2MT_2'\sphericalangle = \alpha'$, és $T_1MT_1'\sphericalangle = \beta'$; továbbá, hogy $MT_1T_1'\sphericalangle = \alpha$ és $MT_2T_2'\sphericalangle = \beta$.

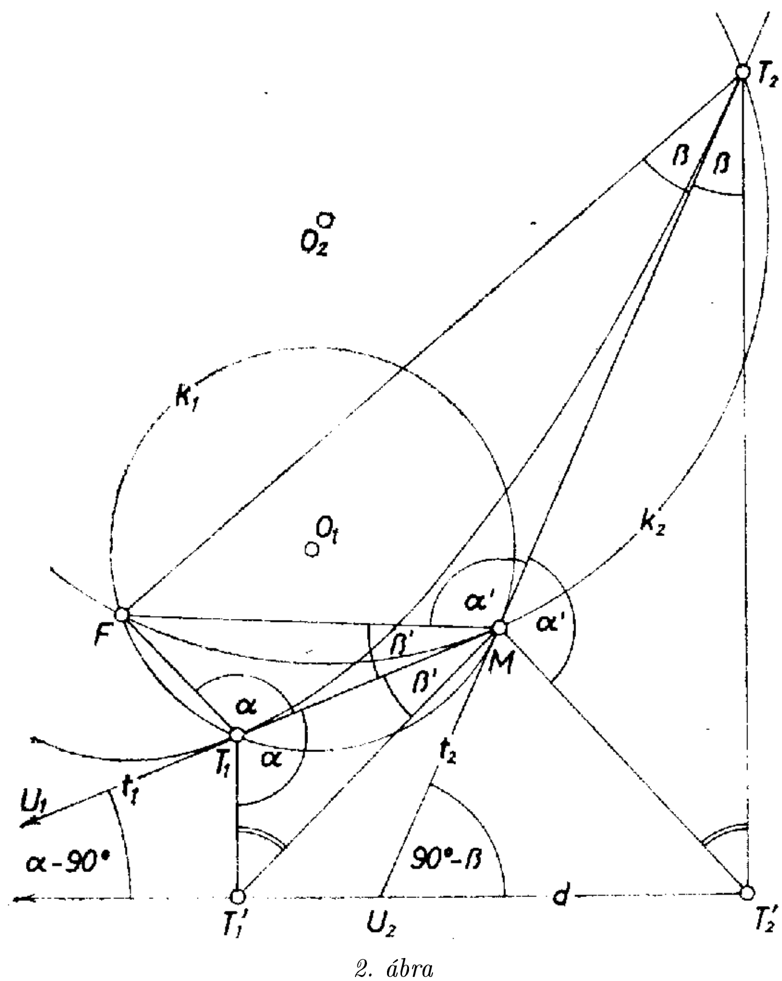
Az $MT_1'T_2'$ egyenlő szárú háromszög tengelye párhuzamos T_iT_i';-vel, ezért $MT_1'T_1\sphericalangle = MT_2'T_2\sphericalangle$, és az $MT_1'T_1$, $MT_2'T_2$ háromszögekből $\alpha + \beta' = \alpha' + \beta$.

Másrészt a $T_1MT_2\sphericalangle = \alpha' + \beta'$ szöget kifejezhetjük α-val és β-val.



1. ábra

Legyen t_i metszéspontja d-vel U_i, ekkor a $T_1MT_2\sphericalangle$ egyenő az $U_1MU_2\sphericalangle$-gel (1. ábra), illetve egymás mellékszögei (2. ábra), de mindkét esetben csekély további számítás szerint $\alpha+\beta$ az értéke, tehát $\alpha'+\beta'=\alpha+\beta$.



2. ábra

Ezt az előbbi egyenletből kivonva $\alpha-\alpha'=\alpha'-\alpha$, tehát $\alpha'=\alpha$, majd tovább $\beta'=\beta$. Ezeket akartuk bizonyítani.

U_1 és U_2 közül legföljebb az egyik nem jön létre, pl. U_1 nem, ha T_1 éppen a parabola csúcsa, és akkor $\alpha=90°$. Ekkor közvetlenül látjuk a $T_1MT_2\sphericalangle=90°+\beta=\alpha+\beta$ egyenlőséget. – Ugyanezt kapjuk akkor is, ha M éppen a d-n adódik.

Váradi Ferenc (Miskolc, Földes F. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Mindkét megoldásból kiolvasható, hogy az M-et a T_1T_2 húr felezőpontjával összekötő egyenes merőleges d-re, tehát megadja a parabola tengelyének irányát. Ez is érdekes, egyszerű tulajdonsága a parabola *két* érintőjének.

2. Ha a feladat állítását mint F megszerkesztésének lehetőségét tekintjük a T_1, T_2, M ponthármasból, akkor kiolvasható az a megfordítása is, ha adott F, t_1 és t_2 (a T_1, T_2 nélkül), tehát M is: vesszük F tükörképeit t_i-re, ezekből $T_1'T_2'$ a vezéregyenes, és az erre T_i'-ben emelt merőleges t_i-ből kimetszi a T_i érintési pontot.

3. Az állításnak az a fele, hogy bármelyik k_i ($i = 1,\ 2$) átmegy F-en, speciális esete *Lambert* tételének, [1], amely szerint a parabola 3 érintője által meghatározott háromszög körülírt köre átmegy a fókuszon. Ugyanis pl. t_1-en T_1 megadása azt jelenti, hogy t_1 és T_1 határátmenettel kétszeresen használható fel: t_1 és t_1 „metszéspontja" T_1, „azokat" t_2 „M-ben és M-ben" metszi, és így a T_1MM „háromszög" köré írt k_1 kör az M (és M) pont(ok)-ban érinti t_2-t.

[1] Lásd pl.: *Dörrie, H.*: A diadalmas matematika (Gondolat Kiadó, Budapest, 1965) 224. old.